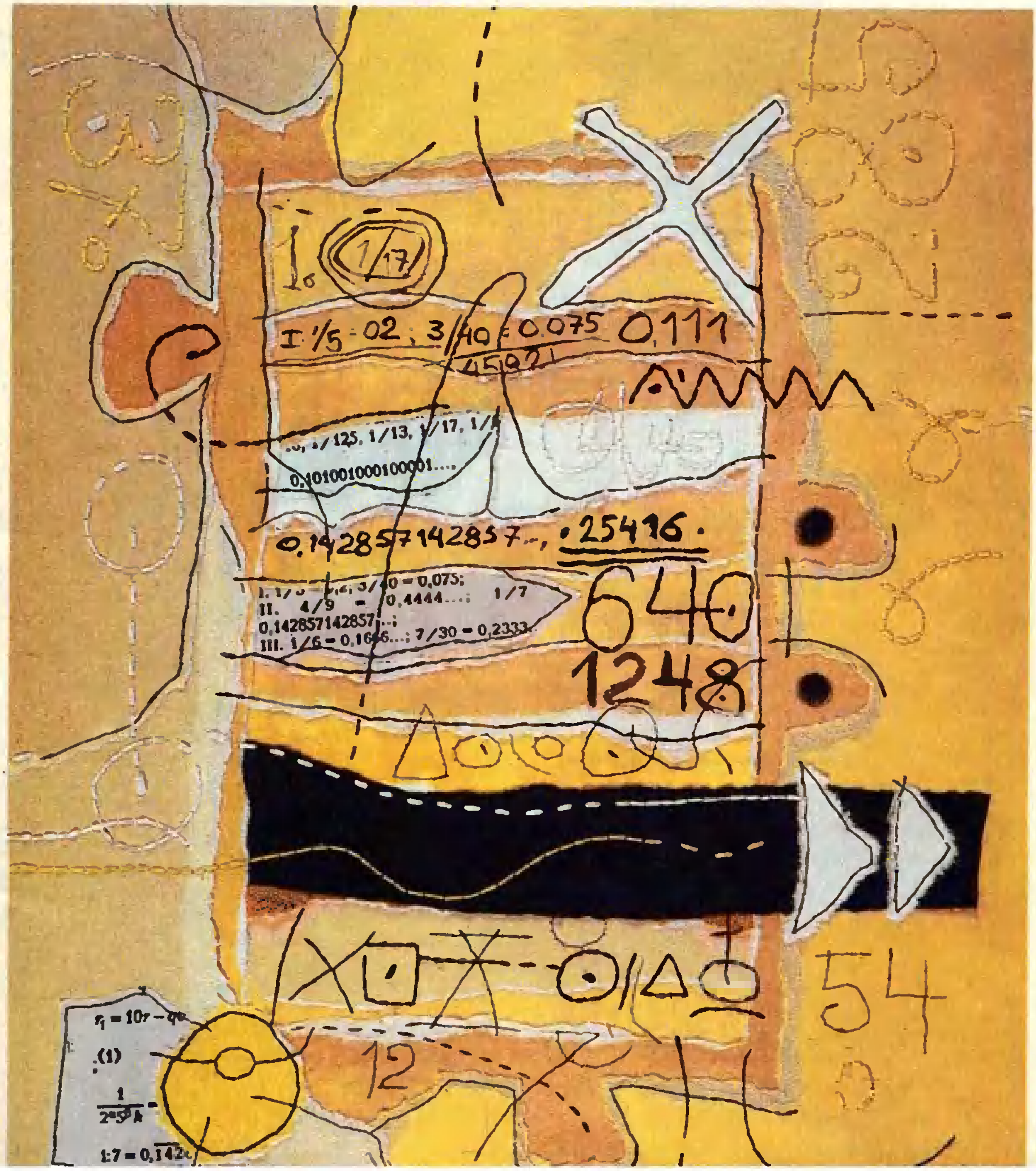
ISSN 0130-2221

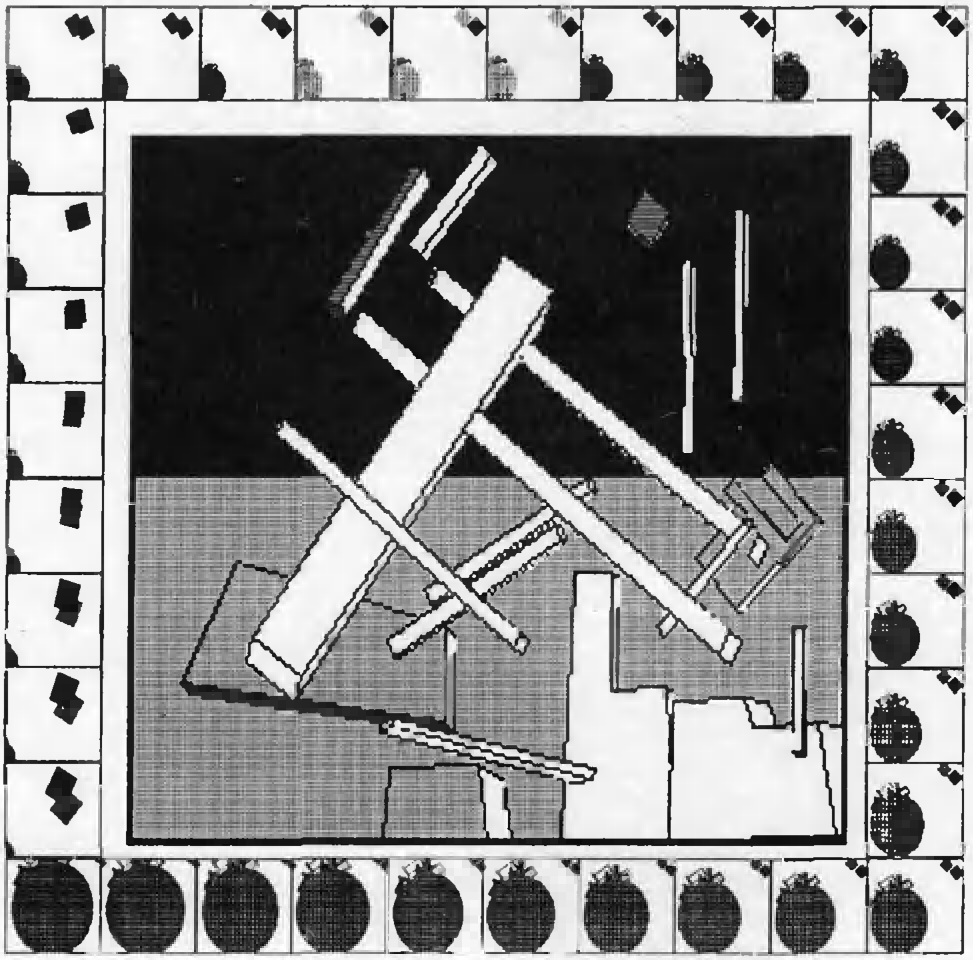
МАРТ/АПРЕЛЬ 1994 · №2

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ



ОБРАЗЫ ПРОСТРАНСТВА



Первая программа компьютерной графики была создана в США в 1961 году Иваном Сазерландом. Она называлась «Sketchpad» и обладала возможностью рисовать круги и линии с помощью электронного пера. Сегодня развитие компьютерной графики происходит с немыслимой скоростью и захватывает все большие и большие пространства человеческой деятельности. Визуализация научных экспериментов и индустрия развлечений, печать и кинематограф, видео и виртуальная реальность, мультимедиа и искусственный разум невозможны сегодня без компьютерной графики.

Ученые и художники, инженеры и... безумные фанатики разрабатывают все новые программы, аппаратуру, идеологию и теорию. Наконец, все это становится новым языком, новой возможностью для коммуникаций человек—компьютер и даже чело[illegible]—человек. Конечная задача человечества, как считал К.Э.Циолковский, — освоение [illegible]са, и по сути компьютерная графика является основой для решения этой за[illegible]ало положено — 1961 год можно считать точкой отсчета нового времени. [illegible]е человвк обвел кисть своей руки, приложив ее к холодному стеклу [illegible]. А впереди?.. Впереди изобретение новой азбуки, нового книго[illegible] кто знает, может быть нового компьютера. Электронное изо[illegible]

[illegible]м утопию русских конструктивистов. Откуда это трехмер[illegible]рных фантазий Эль Лисицкого и не является ли черный [illegible]ототипом экрана компьютера?

С.Шутов

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

МАРТ/АПРЕЛЬ · 1994 · №2

В номере:

Квант

Учредители — Президиум РАН, НПП «Бюро Квантум»
Издатель — НПП «Бюро Квантум»

Бюро Квантум


BONAV: CAVALERIO

Математический эпос Кавальери

С. ЛУРЬЕ

«Геометрия Кавальери, вышедшая в свет 300 лет тому назад, в 1635 г., после смерти автора была выпущена вторым изданием в 1653 г. и с тех пор ни разу не переиздавалась и не переводилась ни на один из языков», — пишет в кратком предисловии к книге Б.Кавальери «Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного» («Классики естествознания», М.–Л., 1940) человек, без которого не было бы этого — третьего в истории! — издания. Это Соломон Яковлевич Лурье (1890 — 1964), один из крупнейших историков античности, филолог, философ, переводчик и комментатор Ксенофонта, Плутарха и других античных авторов. С.Я.Лурье перевел «Геометрию неделимых» Кавальери, снабдил ее обширными комментариями и блестящей вступительной статьей. Выдержки из этой статьи мы и предлагаем вашему вниманию. Поскольку обьем первоисточника очень велик, мы позволили себе местами пересказать текст С.Я.Лурье своими словами — исключительно с целью сокращения.

Бонавентура Кавальери родился в Милане в конце XVI века (по некоторым данным, в 1598 г.) в одной из некогда знатнейших семей, к тому времени обедневшей и утратившей былое влияние. Кавальери получил в молодости прекрасное гуманитарное образование: он был основательно знаком с лучшими произведениями греческой и латинской прозы и поэзии, знал столько латинских стихов наизусть, что всегда пересыпал ими свою речь, и писал на безукоризненной классической латыни. И впоследствии его математические произведения изобилуют изящнейшими классическими оборотами, метафорами и анекдотами; в них цитируются Гомер, Геродот, Платон, Аристотель, Филон, Диоген Лаэрций, Плавт, Вергилий, Овидий, Гораций, Персий и др. Еще юношей Кавальери вступил в монашеский орден иезуатов (иеронимитов; не смешивать с иезуитами). Монастырь св. Иеронима находился в непосредственном соседстве с родительским домом Кавальери, и монахи, с которыми он постоянно встречался, оказали большое влияние на его развитие: начало XVII в. было временем глубокого упадка образованности в Милане, и монастыри были почти единственными очагами античной культуры. Примерно в 1616 г. Кавальери перешел в монастырь св. Иеронима в Пизе.

Еще в молодости Кавальери увлекался точными науками и читал античных классиков математики. В бытность его в Пизе он сблизился с известным тогда математиком монахом-бенедиктинцем Кастелли, который, убедившись в его исключительных математических дарованиях, дал ему совет посвятить себя изучению геометрии. В чрезвычайно короткое время Кавальери изучил Архимеда, Паппа, Аполлония и других античных авторов, так что Кастелли поручил ему даже временно замещать его на кафедре математики. Кастелли познакомил Кавальери с величайшей знаменитостью того времени — Галилеем, который пришел в такое же восхищение от Кавальери, как и Кастелли, и некоторое время руководил его занятиями.

В центре научных интересов Галилея и Кастелли в это время была астрономия. В порядке дня стояли наблюдения за планетами Медичи (спутниками Юпитера) и Сатурном, показавшие ошибочность воззрений Аристотеля, правильность которых считалась несомненной в продолжение всего средневековья; эти ученые искали также дальнейших подтверждений и обоснований тезы Коперника. В этих наблюдениях и занятиях принял горячее участие и Кавальери.

Вскоре Кавальери почувствовал себя настолько сильным в математике, что когда в начале 1619 г. открылась вакансия на одну из лектур математики в Болонье, он выставляет уже свою кандидатуру, называя себя «профессором математики и учеником Галилея» и ссылаясь на то, что ему было поручено замещать в Пизе Кастелли. Из переписки Кавальери с Галилеем известно, что тот поддержал кандидатуру Кавальери; успеха она, однако, не имела.

В мае 1620 г. Кавальери пришлось вернуться в Милан. В связи с тем, что в это время в Милан приехал кардинал Борромео, обладатель хорошего телескопа, у Кавальери снова пробуждается интерес к астрономии. Привлекает его и другой вопрос, стоявший тогда в центре интереса математиков, — логарифмы. Но в общем отсутствие руководства и инструментов должно было отвлечь его от астрономических занятий, не говоря уже о том, что обстановка складывалась крайне неблагоприятно для его математических работ вообще. Вот что он пишет Галилею в письме от 28 июля 1621 г.: «Подлинно чудо, что я могу заниматься математикой в это время, как потому, что не с кем делиться, так и потому, что, возвратившись на родину, где находятся старички, которые ждут от меня больших успехов в теологии и в искусстве произносить проповеди, я ясно представляю себе, как их должно огорчать, что я так пристрастился к математике. Однако никогда не будет того, чтобы я увлекся другими науками, так как я знаю, что это — тот настоящий путь, по которому я должен идти...»

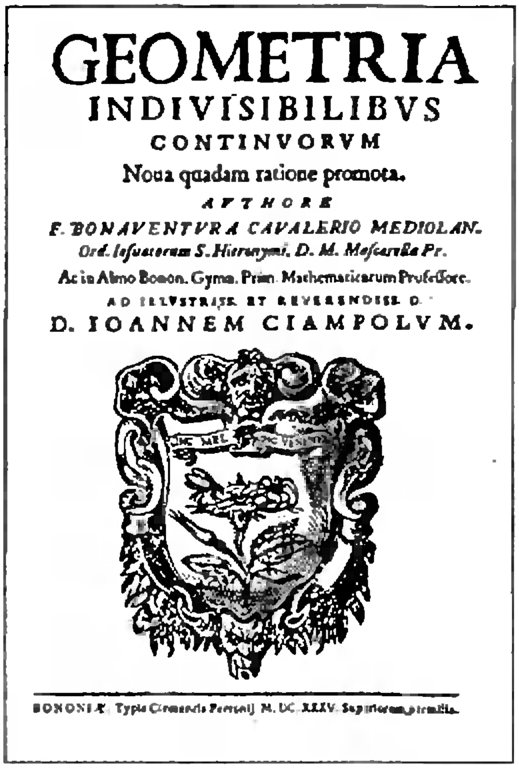
Не будучи в состоянии в силу отсутствия научного общения заниматься специальными математическими и астрономическими вопросами так, чтобы быть на высоте современной ему науки, Кавальери занялся общими вопросами философии математики, пограничными между математикой и той схоластической наукой, которой заставляли его заниматься его коллеги по монастырю, и пришел при этом к своей теории неделимых. Не случайно эта теория носит следы богословских занятий Кавальери (как сообщают его биографы, начиная с 1621 г. в течение двух лет он преподавал курс богословия, пользовавшийся огромным успехом и привлекавший массу посторонней монастырю публики). Он сам в письме к Галилею называет теорию неделимых «чрезвычайно экстравагантной» и «далекой от всего того, что можно найти в произведениях других авторов».

В начале 1623 г. мы застаем Кавальери в Лоди (город близ Милана), где он пробыл до конца 1625 г. Здесь он занимается вопросами, составившими основное содержание его позднейших трудов, — определением площадей и объемов; в то же время он занимается, как он сообщает, и «геометрическими принципами», т.е. теорией неделимых.

В начале 1626 г. Кавальери прибывает в Рим, где сразу же попадает в общество знатного римского сановника, поклонника Галилея, Джиованни Чьямполи. Чьямполи в восторге от Кавальери, который знакомит его со всей системой науки Галилея; он остается покровителем Кавальери на всю жизнь (впоследствии Кавальери посвятил ему свой труд о неделимых). Каковы были обязанности Кавальери в Риме, мы точно не знаем, но, узнав, что Кастелли оставил преподавание в Пизанском университете и что эта кафедра свободна, Кавальери просит Галилея помочь ему получить эту кафедру, что было бы ему гораздо приятнее, «чем сидеть в Риме, ломая себе голову, что бы такое выдумать, что пришлось бы по вкусу этим пресыщенным жизнью господам».

Не только миланские монахи, но и отцы-сенаторы в Болонье и Флоренции готовы были нести расходы на научные математические занятия только в том случае, если эти занятия непосредственно были связаны с нуждами техники, «приносили практическую пользу». Тому, кто хотел, несмотря на это, заниматься вопросами отвлеченной науки, приходилось надеяться на милость пресыщенных аристократов, которые готовы были оплачивать и теоретические научные занятия, лишь бы они были достаточно экстравагантны и щекотали им нервы. (Отсюда и характерный низкопоклонный тон предисловий к научным трудам того времени.)

В таком положении оказался и Кавальери; ему пришлось остаться в Риме. Здесь он привел в окончательный вид свое сочинение о неделимых. Галилей в это время (быть может, под влиянием Кавальери) занимался тем же вопросом, но его сочинение, посвященное неделимым, которого с нетерпением ждал Кавальери, так никогда и не увидело света. Правда, в этом вопросе Галилей и Кавальери стояли на противоположных точках зрения; это не помешало, однако, Галилею воздавать


GEOMETRIA
INDIVISIBILIBVS
CONTINVORVM
Noua quadam ratione promota.
AVTHORE
F. BONAVENTVRA CAVALERIO MEDIOLAN.
Ord. Iesuatorum S. Hieronymi. D. M. Mascarellæ Pr.
Ac in Almo Bonon. Gymn. Prim. Mathematicarum Professore.
AD ILLVSTRISS. ET REVERENDISS. D.
D. IOANNEM CIAMPOLVM.
BONONIÆ, Typis Clementis Ferronij. M. DC. XXXV. Superiorum permissu.

должное гениальности Кавальери, которого он впоследствии в своих «Discorsi» называет «одним из первых математиков своего времени», а в письмах — «вторым Архимедом» и «истинно дивным гением».

Летом 1626 г. Кавальери назначается приором монастыря в Парму. Несмотря на обремененность своими религиозно-административными обязанностями, он завершает здесь окончательную обработку своего труда о неделимых.

Когда в 1629 г. после смерти профессора Маджини в Болонье освободилась кафедра математики, один из влиятельных болонских сенаторов Чезаре Марсильи просит Галилея рекомендовать ему кандидата на эту должность. Галилей предложил на эту кафедру Кавальери. При этом Галилей указал Марсильи, что он чтит Кавальери наравне с Архимедом и что Кавальери успешно занимается труднейшими вопросами геометрии. Марсильи сначала сдержанно отнесся к этой рекомендации, так как Болонья мало нуждалась в чистой математике. Там интересовались прикладными науками и хотели иметь специалиста-астронома; между тем Кавальери, как замечает Марсильи, не прислал порученных ему вычислений по астрономическим таблицам. Галилей ответил на это, что он не сомневается в том, что Кавальери с такой же легкостью сравняется в астрономии с Птолемеем, с какой он в геометрии стал соперником Архимеда; что Кавальери прочел всех важнейших и труднейших авторов, как то: Евклида, Аполлония, Архимеда, Птолемея и др., и хорошо знаком с системами Птолемея и Коперника. «Свидетельством быстроты его разума является то, что он нашел новый метод доказательства, при помощи которого он доказывает более простым путем теоремы Архимеда и важнейшие теоремы других серьезных авторов» (имеется в виду теория неделимых).

Этих рекомендаций оказалось достаточно, чтобы Кавальери на основании представленной им в рукописи работы («Геометрия неделимых») был избран на кафедру, на которой он и пребывал до самой смерти (последовавшей в 1647 г.), окруженный почетом и похвалами. Одновременно папа Урбан VIII назначил его пожизненным приором монастыря св. Марии делла Маскарелла, чтобы Кавальери, «не имея над собой никакого начальства, мог без помехи заниматься научной работой». Его звали в Пизанский университет, но он остался в Болонье. Здесь он получал кроме прочего и крупное жалованье, особенно в последний год перед его неожиданной смертью. Кавальери вызывали в Рим на съезды иеронимитских приоров. Он всегда находился на лучшем счету у духовного начальства, постоянно отмечавшего его безупречную монашескую жизнь и исключительные дарования. Папы Урбан VIII и Иннокентий X осыпали его милостями. Священническая должность Кавальери была фактически лишь почетной, так что он имел возможность все свое время посвятить любимой им научной работе.

Эти исключительно благоприятные жизненные обстоятельства не сделали, однако, его жизнь счастливой. Он не был удовлетворен. Причина была в муках физических и моральных: с одной стороны, это была тяжелая мучительная болезнь — подагра, с другой, — то, что ему не удалось ни освободить от противоречий свою теорию неделимых, ни сделать ее ясной своим современникам. Менее прозорливые современники превозносили его как раз за другие, менее оригинальные и значительные произведения, а в теории неделимых видели скорее чудачество великого ученого.

Из сочинений, написанных Кавальери, важнейшие следующие:

1. «Всеобщее руководство для измерения неба, в котором изъясняются основы и правила действий логарифмической тригонометрии, причем все астрономические вычисления приводятся почти только к одному обычному сложению», вышедшее в Болонье в 1632 г. В этой книге, опубликованной Кавальери вскоре после занятия им кафедры, даны одиннадцатизначные таблицы тригонометрических функций; здесь содержится также разбор важнейших приемов, применяемых в тригонометрии и астрономии. Логарифмическая таблица синусов-верзусов была вычислена Кавальери впервые. Книга эта посвящена «славнейшим и мудрейшим пятидесяти членам болонского сената»; в ней Кавальери демонстрирует свое искусство в области той практической математики, ради которой он и был приглашен на кафедру.

2. «Зажигательное зеркало или трактат о конических сечениях и некоторых поразительных явлениях в них в области света, тепла, холода, звука и движения», Болонья, 1632 г. Исследование, посвященное отражению света от параболических, эллиптических и гиперболических зеркал, проведенное чисто геометрически. Кавальери дает разбор соответствующих античных теорий (Архимеда и Прокла); дает способ построения конических сечений как путем особых приборов, так и путем геометрического нахождения ряда последовательных точек; дает учение о движении, причем впервые вводит понятие «равнодушия тел к движению», для которого Ньютон ввел термин инерция.

3. «Геометрия неделимых», вышедшая первым изданием в 1635 г., а вторым (без существенных изменений) в 1653 г., после смерти Кавальери.

4. «Сто различных задач для демонстрации полезности и легкости применения логарифмов в тригонометрии, астрономии, географии и т.д.», Болонья, 1639 г. Это — различные задачи, собранные для учебных целей и интересные для нас тем, что одна из них является дальнейшим развитием «Геометрии неделимых» и показывает, что новые учения, изложенные впоследствии в «Опыте IV», сформировались у Кавальери уже в 1639 г.

5. Три астрологических произведения, из которых наиболее любопытен «Трактат о планетном цикле и о пользовании им», Болонья, 1646 г. Это сочинение было выпущено под псевдонимом Silvio Filomanzio (Сильвий, Любитель гаданий). Это последнее произведение вызвало возмущение позднейших критиков: Кавальери сам же заявлял, что он враг астрологических предсказаний и в то же время выпустил под псевдонимом книгу по астрологии. Сам Кавальери в одном из писем к Торичелли говорит по этому поводу: «Занимающиеся предсказательной астрономией пользуются таким успехом, что они большего не могли бы снискать, даже если бы они вновь открыли всю математику сначала до конца и если бы они открыли более чудесные вещи, чем Архимед. Но что же остается делать? Эти люди достигают более коротким путем славы и популярности, т.е. той же цели, к которой приходят и бедные математики, в том числе величайшие геометры, но лишь после бесконечных, бесконечных, бесконечных трудов. Но так как такова судьба дел человеческих, то следует иметь терпение и приспособляться к общему мнению ради нездешней цели, сохраняя, однако, истинное добро для конечной цели своей собственной жизни — для познания — и для тех, которые предпочитают знать, чем казаться знающими».

Это типичный для XVI — XVII вв. вообще и для католического священника в частности маккиавелизм. В той обстановке, в которой жил и действовал Кавальери, он теряет значительную долю своей предосудительности.

6. «Тригонометрия плоская и сферическая, линейная и логарифмическая», Болонья, 1643 г. Руководство по плоской и сферической тригонометрии с приложением таблиц.

7. «Шесть геометрических опытов», Болонья, 1647 г. Из них первые два дают краткое изложение «Геометрии неделимых» с новыми добавлениями, третий представляет собой ответ на возражения Гульдина против «Геометрии неделимых»; четвертый «О применении неделимых к алгебраическим степеням»; пятый «О применении неделимых к телам, плотность которых равномерно возрастает»; шестой — ряд различных разрозненных наблюдений, одно из которых посвящено гидравлической машине «Гидраконсистерио» (с чертежом машины); гидравлике же посвящено «Письмо гидравлического содержания», опубликованное после смерти Кавальери во Флоренции в 1723 г.

Как мы видим из этого списка, несмотря на то, что Кавальери уже с юных лет интересовался преимущественно теоретическими обобщениями и философским обоснованием отвлеченной науки о площадях и объемах, ему в силу требований болонских правителей пришлось заняться вплотную практической, вычислительной и прикладной математикой, причем предсказание Галилея, что и в этой области Кавальери не уступит никому, подтвердилось полностью. Вот что пишет по этому поводу Бортолотти в биографии Кавальери:

«Преподавательские обязанности Кавальери требовали от него усовершенствования планетарной теории и составления астрологических таблиц. Для этого он должен был, с одной стороны, углубить теорию Коперника, которую он *впервые в Италии публично излагал с кафедры*, с другой стороны, чтобы не впасть в предрассудки, имевшие источником магическую астрологию, составить для астрономических занятий карту небесной сферы. Эта сторона его научной деятельность нашла свое выражение в его мелких произведениях, как ни как весьма замечательных хотя бы ввиду новых интересных выводов из области сферической тригонометрии, ввиду гениальных приложений теории логарифмов, которые он впервые ввел в употребление в Италии, и ввиду некоторых открытий из области механики и оптики, из которых надо отметить нахождение формул для определения фокусов зеркал и чечевиц, содержащихся в «Опыте VI» (1647)».

Но не в меньшей степени, чем эта невольная дань духу времени, научную физиономию Кавальери определяет другое. Как мы имели уже случай убедиться из данного выше краткого биографического обзора, Кавальери был прежде всего типичным гуманистом, убежденным поклонником античности. Но он не только гуманист, ученик античных поэтов и философов; он еще и католический священник, прошедший долгую богословскую муштру. Для Кавальери —

правоверного католика определенные реакционные позиции в математике были еще более обязательны, чем для Кавальери-гуманиста; он и в самом деле внешне ни в чем от них не отступил.

Первым, кто ввел учение о беспредельно большом числе беспредельно малых частиц в научный обиход, применив его для нахождения объемов тел, и получил при этом чрезвычайно плодотворные результаты, был Кеплер; в предисловии к своей «Геометрии» Кавальери говорит о нем как о своем предшественнике, хотя подчас и противопоставляет свое учение учению Кеплера.

Кеплер не стремился к математической безукоризненности всех своих выводов. Он рассуждал скорее как естественник, чем как математик; теория бесконечно малых была для него рабочей гипотезой, которая хороша уже потому, что дает быстрый и короткий путь к разрешению ряда задач и, как правило, приводит к верным результатам. Рассуждения по аналогии также играют большую роль в его стереометрии.

Набожный католический священник Кавальери не мог и не хотел стать на точку зрения античных материалистов. Его задача как раз обратная:

1. Вопреки все большему распространению и успеху алгебры показать, какого огромного прогресса можно еще достигнуть в высокой научной математике без всякой помощи этой варварской науки.

2. Влить новую жизнь в официальную классическую математику, оплодотворив ее не демокритовским атомизмом, а тем «неопифагорейским» учением о неделимых, которое было санкционировано и освящено авторитетом католической церкви.

В начале своих «Опытов» Кавальери так кратко излагает свой метод: «В «Новой геометрии неделимых» неделимые непрерывного служат как бы главным инструментом для определения размера как плоских фигур, так и тел. К этой цели мы подходим двумя путями. Первый метод изложен в шести книгах «Геометрии»; второй содержится в седьмой книге. Оба эти метода мы с полным правом называем методом неделимых, причем один — первым, а другой — вторым методом. И в том и в другом методе для определения размера плоских фигур применяются прямые линии, параллельные некоторой данной прямой линии (называемой их регулой), бесконечные числом, проводимые в нашем воображении в этих фигурах и имеющие своими границами те две линии, которые касаются этих фигур с противоположных сторон и которые названы в части В определения I книги 1 их парными касательными; одна из них обычно берется за регулу прочих параллельных линий. Для определения же размеров тел применяются плоскости, параллельные некоторой данной плоскости (называемой их регулой), бесконечные числом, проводимые в нашем воображении в этих телах и имеющие границей две плоскости, касающиеся этих тел с противоположных сторон и названные в части В определения II книги 1 их парными касательными плоскостями; одна из них обычно берется за регулу прочих параллельных плоскостей. Отсюда ясно,

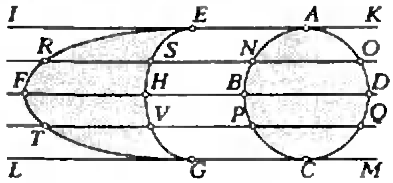


Рис. 1

что плоские фигуры мы должны представлять себе в виде ткани, сотканной из параллельных нитей, а тела — в виде книг, состоящих из наложенных друг на друга параллельных листов. Но в ткани — нити, а в книгах — листы всегда содержатся в конечном числе, так как они имеют некоторую толщину; мы же должны и при одном и при другом методе принять, что в плоских фигурах линии, а в телах — плоскости не ограничены числом и лишены какой бы то ни было толщины. Но пользуемся мы этими неделимыми по-разному: при первом методе мы рассматриваем их как бы все сообща, при втором — каждую отдельно. Так, например, пусть две какие угодно плоские фигуры $ABCD$ и $EFGH$ (рис. 1) построены на одних и тех же параллельных прямых IK и LM; пусть одна из них, например LM, взята за регулу параллельных прямых, которых можно провести бесконечное число в этих фигурах. Пусть в числе этих прямых, проведенных в фигуре $ABCD$, есть прямые NO, BD, PQ и т.д. и т.д., а в числе прямых, проведенных в фигуре $EFGH$, прямые RS, FH, TV и т.д. Мы можем сравнивать линии фигуры $ABCD$ с линиями фигуры $EFGH$ двумя путями: либо все сообща, т.е. сравнивая совокупность с совокупностью, либо поодиночке, т.е. сравнивая в отдельности какую-либо прямую фигуры $ABCD$ с какой-либо прямой фигуры $EFGH$, являющейся ее продолжением. Первый путь соответствует первому методу, когда сравниваются между собой совокупности всех линий плоских фигур и совокупности всех плоскостей тел, сколько бы их ни было. Второй же путь применяется при втором методе, когда отдельные линии сравниваются с отдельными линиями, а отдельные плоскости с отдельными плоскостями, являющимися их продолжением. Каждый метод исходит при сравнении размеров фигур и тел из своего собственного общего принципа. Этот принцип при первом методе таков. Если в двух каких угодно плоских фигурах, хотя бы не имеющих одной и той же высоты, все линии одной фигуры, проводимые в воображении параллельно какой-либо заданной регуле и взятые все вместе, равны всем линиям другой фигуры, проводимым в воображении, параллельно какой угодно данной регуле и взятым вместе, то и сами фигуры равны друг другу, и наоборот. Так, если на чертеже равны между собой RS и NO, FH и BD, TV и PQ и все остальные, взятые вместе, то и самые фигуры $ABCD$ и $EFGH$ будут равны между собой. Более того, и вообще: то же отношение, какое существует между всеми линиями [одной фигуры] и всеми линиями [другой], существует и между самими плоскими фигурами. Точно так же обстоит и с телами: если все плоскости одного тела равны всем плоскостям другого, взятым по каким угодно регулам, то и самые тела будут равны; если же между всеми плоскостями существует какое-либо отношение, то такое же отношение существует и между самими телами, и наоборот. Второй способ таков: если в двух каких угодно плоских фигурах, построенных на одних и тех же параллельных линиях, из которых одна — регула, каждая линия, параллельная общей регуле, будучи сравнена с каждой же линией, составляющей ее продолжение, окажется равна последней, то и самые фигуры будут равны. Так же и в телах: если каждая плоскость одного, параллельная общей регуле, будет равна соответствующей плоскости другого, параллельной той же регуле, то и самые тела будут равны между собой. Точно так же, какое бы отношение ни имели между собой эти плоскости, лишь бы оно было общим для всех, такое же отношение будут иметь и самые тела, если только мы принимаем, что они заключены между одними и теми же парными касательными плоскостями, из которых одна является их общей регулой. Из этих двух правил можно конструировать одно, еще более общее правило, представляющее собой основную сущность всей этой геометрии: *как плоские фигуры, так и тела относятся друг к другу, как все их неделимые, взятые вместе,* и, если окажется, что все они имеют одно и то же общее всем им отношение, — *как эти неделимые, сравниваемые друг с другом поодиночке.*»

Для иллюстрации применения метода Кавальери на практике весьма пригодна задача о «чаше» и конусе, чрезвычайно популярная в ту эпоху. Эта задача была впервые пущена в оборот Лукой Валерием, а затем применена для иллюстрации метода неделимых Кавальери и Торричелли. Фигура, изображенная на рисунке 2 (AGB — полуокружность), вращается вокруг оси CG; фигура ADG при вращении образует «чашу», а треугольник CDG — конус. Если мы проведем где угодно плоскость, параллельную основанию DF, то нетрудно показать, что сечение внутри чаши (полученное, например, от вращения MN) равно сечению внутри конуса (полученному от вращения PQ). В самом деле, в треугольнике CNQ сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы; следовательно, и сумма площадей кругов, построенных на катетах, равна площади круга, построенного на гипотенузе. Но CN — радиус круга, равный AC, а $CQ=PQ$ (поскольку $ABCD$ — квадрат); итак, круг MQ = =круг NQ + круг PQ. Вычитая из обеих частей уравнения круг, построенный на катете NQ, получаем, что площадь кольцевого сечения чаши равна площади соответствующего кругового сечения конуса.

Мы убедились, что любое горизонтальное сечение чаши (круговое кольцо) равновелико взятому на том же уровне сечению конуса (кругу). Это, с точки зрения Кавальери, означает, что и все сечения чаши равны всем сечениям конуса, а значит, и чаша равновелика конусу. Этот вывод дает нам возможность, зная формулу для объема цилиндра и конуса, найти формулу для объема шара. В самом деле, объем цилиндра $\pi R^2 H$, или в данном случае (при $R=H$) πR^3, объем конуса $\frac{1}{3}\pi R^2 H$, или в данном случае $\frac{1}{3}\pi R^3$, а следовательно, и объем чаши $\frac{1}{3}\pi R^3$. Объем полушара равен объему цилиндра без объема чаши, т.е. $\frac{2}{3}\pi R^3$. Откуда объем шара $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Новый метод потребовал строгого обоснования. Кавальери чувствовал, что тут у него не все гладко. Он заменил элементы Кеплера, имеющие чрезвычайно малую толщину, неделимыми, имеющими нулевую толщину, благодаря чему из приблизительной получил точную конгруэнцию контуров и таким образом заменил приближенные выводы абсолютно точными. Но эта концепция неизбежно должна была натолкнуться на ряд противоречий, — прежде всего на то, что из нулей нельзя составить конечную величину («ex nihilo nihil fit»). Кавальери пришлось внести поправку: непрерывное и неделимое — не одно и то же; между каждыми двумя неделимыми есть прослойка непрерывного. Как же должен был ответить Кавальери на дальнейший вопрос: имеют

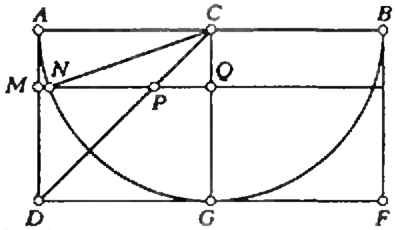


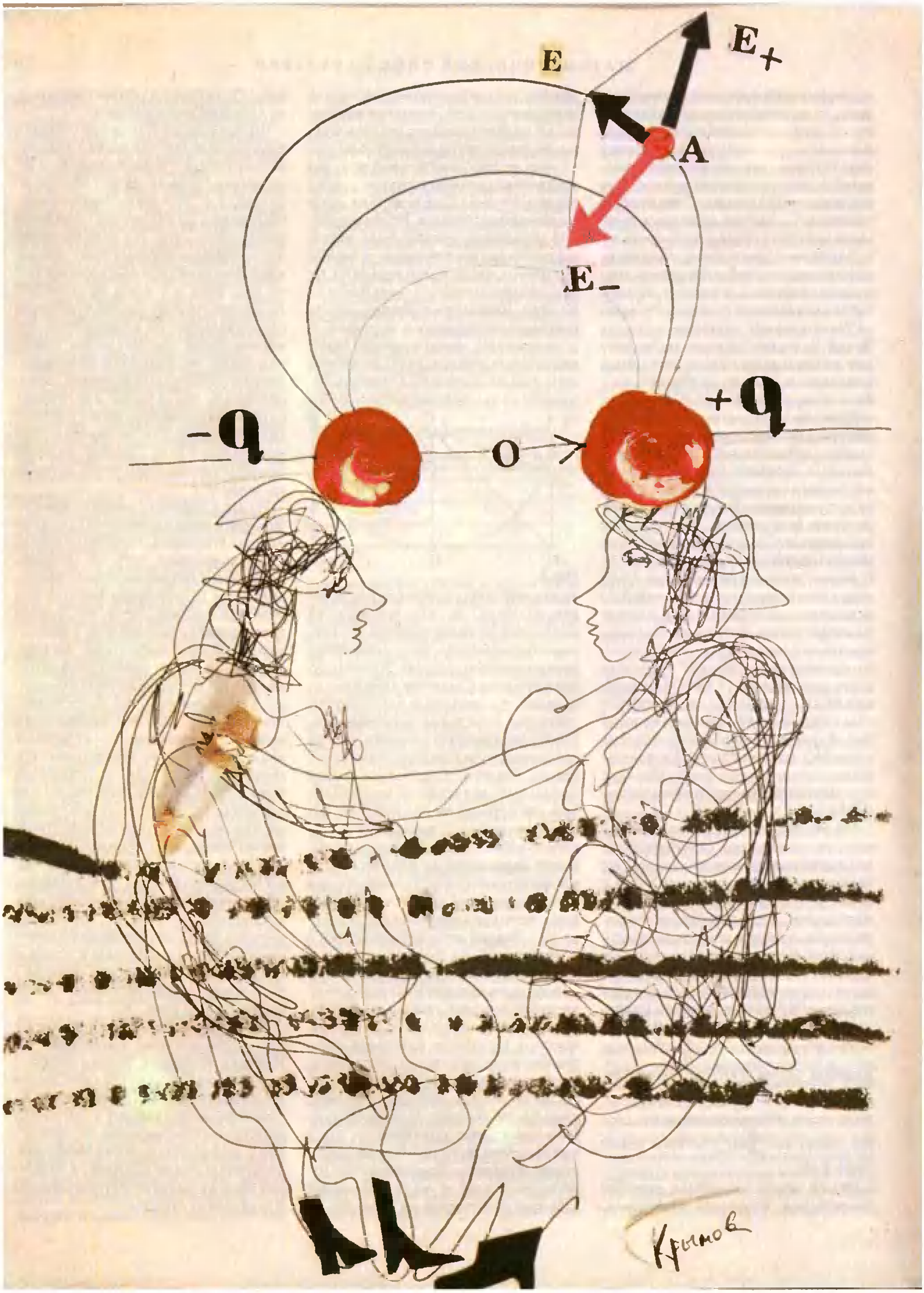
Рис.2

ли эти прослойки конечную или нулевую толщину? В силу принципа ex nihilo nihil fit единственным возможным ответом было то, что эти прослойки имеют конечную толщину. В таком случае элементом фактически служило не неделимое, а неделимое плюс соответствующая прослойка непрерывного, имеющая конечную толщину, т.е. он обходным путем возвращался на точку зрения Кеплера, и против его теории можно было выставить те же возражения, что и против теории Кеплера. Вот одно из возражений, высказанное Гульдином: «Нам известно только о совпадении параллельных плоскостей, но что касается остальной поверхности и остальных границ, то разум не находит здесь ничего, на чем бы он мог успокоиться... Ведь он ничего не доказывает о поверхностях, но только о линиях, а что касается поверхности, лежащей между двумя попарно равными прямыми, то мы не знаем, каковы две остальные границы, замыкающие эту поверхность...» Из ответов Кавальери ясно, что он, хотя чувствовал инстинктом неубедительность своего построения, но, тем не менее, не сознавал отчетливо, в чем она заключается. Непонятливость Кавальери имеет причиной то, что в глубине души он все время представляет себе неделимые непосредственно налегающими друг на друга и все время забывает о сделанной им внешней, но очень существенной уступке относительно прослоек непрерывного.

Вторая ошибка Кавальери состоит в его утверждении, что всякий процесс, оперирующий с уменьшающимися величинами, должен когда-либо закончиться, т.е. что предел переменной, убывающей по какому бы то ни было закону, есть нуль. На этом основаны две теоремы, в которых одно тело накладывается на другое бесконечное число раз, пока все части не совпадут. Незаконность этого приема чувствует и сам Кавальери: «Я хорошо знаю, что против этого доказательства можно возразить, что указанное наложение, которое производится по частям, последовательно раз за разом, в некоторых случаях может не окончиться никогда. Но этой трудности не заметил и не вменил мне в вину Гульдин, хотя она гораздо существеннее, чем та, которую он привел».

Но эти сложности не могли поколебать уверенности Кавальери в справедливости его теории, которую он считал своей важнейшей научной заслугой, хотя и не мог безукоризненно ее обосновать. «Не бесполезным кажется мне обратить внимание на то, что, приняв эти положения за истинные, я доказываю целый ряд предложений, уже доказанных Евклидом, Архимедом и другими, причем мои выводы точно совпадают с их выводами; это, быть может, признак того, что мои предпосылки верны...» — пишет он. И — в предисловии к книге VII своей «Геометрии»: «О, геометры! Признаюсь, я... даже бы и совсем удалил (метод неделимых) и из первых книг, если бы мне не казалось низким преступлением скрыть эти таинства геометрии от мудрейших мужей. Нет, пусть лучше эти основы, с выводами из которых столь удивительным образом совпадает столь великое множество верных выводов, сделанных другими, будут когда-либо более совершенным путем приведены в порядок трудами кого-либо другого, который в свое время найдет желанный способ развязать этот узел...»

Этот узел развязался благодаря великим реформаторам математики — Ньютону, Лагранжу, Коши и Абелю — много позже. Глядя на труд всей жизни Кавальери с позиций современной математики, можно увидеть в нем начала интегрального исчисления, аналитической и дифференциальной геометрии, родоначальником которых, в известной мере, является *брат Бонавентура Кавальери из Милана.*


E
E+
A
E_
-q
O
+q
Крылов

Любовь и ненависть в мире молекул

А.СТАСЕНКО

> *То, Любовью влекомы, сойдутся в единый порядок,*
> *То враждою Раздора вновь гонятся врозь друг от друга*
> *Вплоть до поры, когда, покорясь, воедино срастутся.*
>
> Эмпедокл
>
> *Сейчас швейцар из казенной палаты сказывал...*
> *Будто, говорит, зимой в Петербурге мороз был*
> *в двести градусов... Народ, говрит, ужасался.*
> *Не то в Петербурге, не то в Москве — не упомню.*
>
> А.П.Чехов

Чехов, как врач по образованию, конечно, имел в виду температурную шкалу Цельсия, так что мороз в двести градусов соответствует абсолютной температуре 273 – 200 = 73 К. Заглянув в справочник по физике, можно увидеть, что при этой температуре воздух должен стать жидкостью, в которой даже «ужасаться» было бы затруднительно.

Только в текущем столетии ученые научились превращать в жидкость все газы, даже те, которые казались принципиально неконденсируемыми, «истинными» газами. Ведь основное свойство газов — это стремление занять весь предоставленный им объем, так что, например, в космосе их молекулы могли бы разлететься по всей Вселенной.

Что же заставляет молекулы в жидкости удерживаться рядом друг с другом? Не обладают же они, в самом деле, крючками и зацепками, как это представляли себе древние атомисты. С точки зрения Эмпедокла, конденсацию газа в жидкость можно было бы описать так: влекомые друг к другу Любовью, молекулы сближаются, но затем между ними возникает Раздор, стремящийся разъединить их, так что в конденсированной фазе наступает равновесие этих чувств.

Но какова количественная мера этих молекулярных эмоций, в нашей терминологии — сил притяжения и отталкивания? И почему эти силы вообще возникают — ведь молекулы электрически нейтральны?

Прежде всего, нейтральность вовсе не означает отсутствие электрического поля. Рассмотрим два точечных заряда $+q$ и $-q$, расположенных друг от друга на расстоянии l (рис. 1, слева). Такая

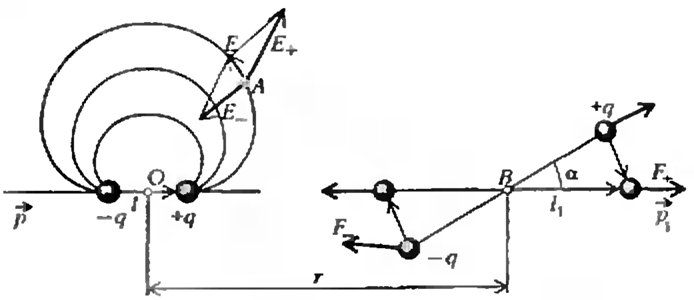


Рис. 1

система называется *диполем*. В произвольной точке A суммарное электрическое поле этих зарядов является суперпозицией (векторной суммой) двух полей $\vec{E}_+$ и $\vec{E}_-$. Построив эту сумму в любой точке, можно провести непрерывные линии электростатического поля, идущие от положительного заряда к отрицательному (на рисунке изображено меридиональное сечение пространственной картины поля $\vec{E}$, обладающей осью симметрии, проходящей через заряды).

Произведение $\vec{p} = q\vec{l}$ называется дипольным моментом. Существуют так называемые *полярные молекулы*, у которых «центры тяжести» положительных и отрицательных зарядов не совпадают (что, конечно, не мешает им быть электронейтральными). Такие молекулы обладают значительным дипольным моментом (сами по себе, без воздействия на них какого-либо внешнего поля) и, значит, дипольным электростатическим полем. Можно ввести «масштаб» — характерную величину молекулярного дипольного момента. Примем за характерную величину заряда q элементарный заряд протона $e_0 = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, а за плечо диполя l_0 — расстояние один ангстрем (специально введенный как раз для измерения расстояний в микромире), т.е. $l_0 = 10^{-10}$ м. Тогда $p_0 = e_0 l_0 = 1{,}6 \cdot 10^{-29}$ Кл·м. Например, молекула хорошо знакомой нам воды обладает большим собственным дипольным моментом $p = 0{,}62\ p_0$.

Найдем электрическое поле этого диполя на расстоянии r вдоль его оси (т.е. в направлении вектора $\vec{l}$, проведенного от отрицательного заряда к положительному). Для этого нужно сложить электрические поля от обоих зарядов:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (r - l/2)^2} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (r + l/2)^2} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2rl}{\left(r^2 - (l/2)^2\right)^2}. \qquad (1)$$

Изучим, как изменяется это поле на больших расстояниях от диполя. Что значит «больших»? Конечно, по сравнению с размерами самого диполя: $r \gg l$. Тогда можно в знаменателе выражения (1) пренебречь величиной $(l/2)^2$ по сравнению с r^2, так что в этом дипольном приближении получится

$$E = \frac{2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{ql}{r^3}. \qquad (2)$$

Видно, что дипольное поле убывает быстрее (как куб расстояния), чем поле точечного заряда.

Что же произойдет, если в электрическом поле уже нарисованного нами диполя окажется другой диполь с моментом $\vec{p}_1 = q\vec{l}_1$ (рис. 1, справа)? Предположим для простоты, что его центр находится на оси OB. Так как поле левого диполя в этом месте направлено вправо, то на положительный заряд действует сила отталкивания $\vec{F}_+ = q\vec{E}_1$, а на отрицательный — сила притяжения $\vec{F}_- = -q\vec{E}_2$ ($\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ — напряженности поля, создаваемого левым диполем в этих точках). Пусть сначала вектор $\vec{p}_1$ повернут относительно оси OB на угол α. Тогда возникнет крутящий механи-

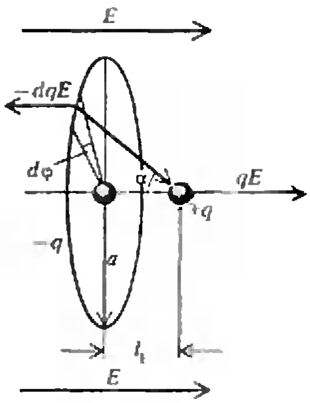


Рис. 2

ческий момент, стремящийся развернуть этот диполь вокруг точки B по часовой стрелке. Этот крутящий момент исчезает только при $\alpha = 0$, т.е. когда $\vec{p}_1$ будет направлен строго вдоль электрического поля левого диполя.

Пусть теперь диполь $\vec{p}_1$ оказался именно в таком положении. Найдем равнодействующую сил $\vec{F}_+$ и $\vec{F}_-$. Чтобы упростить исследование зависимости этой силы от расстояния r между центрами диполей, как и выше, предположим, что это расстояние много больше размеров обоих диполей: $r \gg l, l_1$. Например, в комнатном воздухе среднее расстояние между молекулами в десятки раз больше «диаметров» молекул.

В этом случае напряженность поля, создаваемого левым диполем, можно вычислять по формуле (2):

$$F_+ - F_- = q(E_1 - E_2) =$$

$$= \frac{2q^2 l}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{(r + l_1/2)^3} - \frac{1}{(r - l_1/2)^3}\right) =$$

$$= \frac{2q^2 l}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-3r^2 l_1 - l_1^3/4}{\left(r^2 - (l_1/2)^2\right)^3}\right).$$

Пренебрегая малыми членами в числителе и знаменателе, получим

$$F_+ - F_- \approx -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{6l\,l_1}{r^4}. \qquad (3)$$

Отсюда видно, во-первых, что это сила притяжения (знак «минус»), во-вторых, что она при фиксированном значении l_1 убывает обратно пропорционально четвертой степени расстояния между диполями.

Итак, мы рассмотрели, как притягиваются полярные молекулы. Но есть молекулы, у которых собственный дипольный момент отсутствует, — их естественно назвать *неполярными*, — например, столь же хорошо знакомые нам кислород и азот. Однако и они при определенных условиях превращаются в жидкость — значит, и их молекулы тоже притягиваются друг у другу. Почему же?

Начнем с того, что, попав во внешнее поле $\vec{E}$, молекула может поляризоваться, даже если до этого она не обладала дипольным моментом. Представим себе такую простую модель нейтральной частицы: положительное центральное ядро с зарядом q и отрицательно заряженное $(-q)$ кольцо радиусом a (рис. 2), лежащие в одной плоскости. «Включим» внешнее электрическое поле $\vec{E}$ перпендикулярно плоскости кольца. Тогда положительный заряд сместится в направлении $\vec{E}$, отрицательный — в противоположном, так что возникает некоторое расстояние l_1 между «центрами тяжести» зарядов q и $-q$, т.е. дипольный момент. Чтобы определить его значение, напишем условие равновесия кулоновской силы притяжения между ядром и кольцом и силы со стороны внешнего поля. Для любого элемента кольца длиной $ds = a\,d\varphi$, имеющего заряд $dq = -q\frac{ds}{2\pi a}$, получим

$$-dqE + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,dq}{a^2 + l_1^2}\cos\alpha = 0,$$

или, учитывая, что

$$\cos\alpha = l_1\Big/\sqrt{a^2 + l_1^2},$$

сокращая на dq и принимая еще условие малой деформации нашей системы во внешнем поле $(l_1^2 \ll a^2)$ —

$$q l_1 = 4\pi\varepsilon_0 a^3 E.$$

Для нас важно, что этот *индуцированный* дипольный момент пропорционален напряженности внешнего поля и направлен вдоль этого поля.

Теперь, возвращаясь к ситуации, изображенной на рисунке 1, используя в качестве внешнего поля электростатическое поле (2) левого диполя, получим, что неполярная молекула в точке r приобретет наведенный дипольный момент

$$p_1 = q l_1 = 4\pi\varepsilon_0 a^3\,\frac{2ql}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = 2ql\frac{a^3}{r^3}.$$

Тогда, согласно формуле (3), на нее будет действовать сила притяжения, равная

$$-\frac{2(ql)^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{6a^3}{r^7} \sim -\frac{1}{r^7}.$$

Но откуда берется у неполярной молекулы первоначальный дипольный момент ql (рис. 1, слева)? Прежде всего, из того, что у молекулы нет дипольного момента, не следует, что его нет *в любой момент времени*. Это, например, может быть верно *в среднем* за большой промежуток времени.

Например, вы можете быстро бегать от одной стены комнаты до другой, очень устать и вспотеть, но при осред-

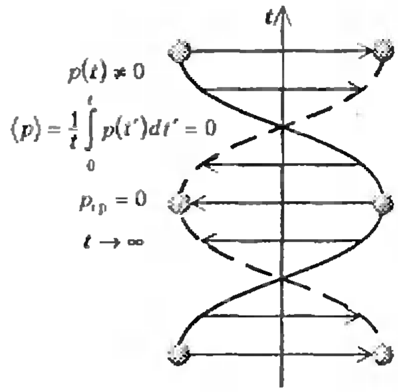


Рис. 3

нении вашей координаты $x(t)$ за час, день, год... получится, что в среднем вы никуда не переместились.

Точно так же дипольный момент молекулы может быстро изменяться во времени, оставаясь в среднем равным нулю (такая ситуация качественно изображена на рисунке 3). Представьте себе, например, что положительный заряд на рисунке 2 совершает колебания с некоторой частотой, смещаясь из центра кольца то вправо, то влево. Тогда с такой же частотой будет изменяться и дипольный момент, и дипольное поле (2) (если пренебречь запаздыванием, существующим в соответствии с теорией относительности). И если в некоторой точке пространства окажется другая молекула того же вещества, переменное поле первой молекулы поляризует эту вторую с такой же частотой. И получается, что в любой момент времени молекулы имеют одинаково направленные дипольные моменты и, значит, притягиваются с силой (3), хотя в среднем их дипольные моменты нулевые.

Это напоминает взаимодействие двух камертонов, один из которых возбужден, а другой вторит ему на той же частоте (резонирует).

Описанная выше сила притяжения, очень резко растущая с уменьшением расстояния, называется силой Ван-дер-Ваальса, по имени ученого, предложившего сравнительно простое уравнение состояния реального газа (отличное от хорошо известного уравнения Клапейрона – Менделеева для идеаль-

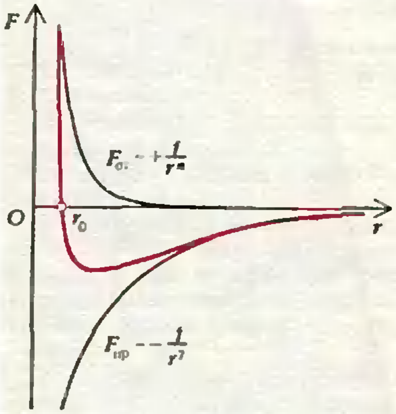


Рис. 4

ных газов). Наличие межмолекулярных сил притяжения приводит к тому, что молекулы «чувствуют» друг друга на больших расстояниях, а не только при соударениях, как твердые шарики. При охлаждении, когда средняя кинетическая энергия и скорость движения молекул уменьшаются, они все дольше могут оставаться вблизи друг друга, и работа сил притяжения (связанная с потенциальной энергией) в конце концов «победит» кинетическую энергию — произойдет конденсация.

Конечно, по мере сближения притяжение должно обязательно смениться отталкиванием («любовь» — «ненависть» в терминах древних философов) — ведь не могут же расстояния между молекулами стать равными нулю. Силы отталкивания зависят от расстояния еще резче: $\sim 1/r^n$, где n для различных веществ меняется в пределах от 9 до 15. При некотором значении $r = r_0$ притяжение и отталкивание уравниваются (рис. 4). Это и будет среднее расстояние между молекулами в конденсированном веществе — жидкости или твердом теле. Разумеется, это не означает, что молекулы совершенно перестали двигаться. И вообще, пора вспомнить, что они являются все-таки микрообъектами и правильное описание их взаимодействия может дать только квантовая механика, о чем особенно приятно вспомнить на страницах журнала «Квант».

НАМ ПИШУТ

Проигрывая в перемещении, выигрываем в силе?

Известно, что наклонная плоскость, например, действительно дает выигрыш в силе. И в подтверждение можно привести десятки примеров. Но всегда ли это так? Попробуем выяснить.

Задача 1. *Чему должен быть равен коэффициент трения (μ), чтобы наклонная плоскость давала выигрыш в силе при любом значении угла наклона (α) этой плоскости к горизонту?*

При равномерном подъеме тела по плоскости сила тяги равна (рис. 1)

$$F = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha), \qquad (1)$$

где m — масса тела.

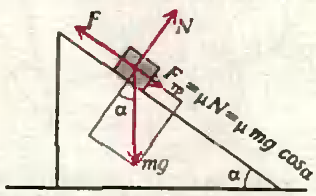


Рис. 1

Выигрыш в силе будет при любом угле, если

$$F_{max} < mg. \qquad (2)$$

Найдем производную силы F от угла α:

$$F'(\alpha) = mg(\cos\alpha - \mu\sin\alpha).$$

Приравняв ее к нулю, получим условие максимума:

$$\mu = \mathrm{ctg}\,\alpha. \qquad (3)$$

Следовательно,

$$F_{max} = mg(\sin\alpha + \mathrm{ctg}\,\alpha\cos\alpha) = \frac{mg}{\sin\alpha}.$$

Условие (2) будет выполняться, если $\alpha = 90°$. Тогда из равенства (3) следует, что $\mu = \mathrm{ctg}\,90° = 0$.

Итак, наклонная плоскость дает выигрыш в силе для любого угла только при $\mu = 0$. Иначе говоря, при любом отличном от нуля коэффициенте трения существует угол, начиная с которого выигрыша в силе уже не будет.

Задача 2. *При каком значении угла наклона к горизонту наклонная плоскость уже не будет давать выигрыша в силе, если а) $\mu = 0{,}25$ — деревянный брусок на деревянной плоскости; б) $\mu = 0{,}08$ — деревянный каток на деревянной плоскости?*

Мы не выигрываем в силе, начиная с момента, когда

$$mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = mg.$$

Отсюда в случае а) получаем

$$\sin\alpha + 0{,}25\cos\alpha = 1.$$

Вспомнив, что $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$ и решив полученное квадратное уравнение, найдем

$$\alpha_1 = 90°, \; \alpha_2 = 62°.$$

Это означает, что выигрыш в силе будет только для углов $\alpha < 62°$.

Для случая б) аналогичный расчет дает $\alpha < 81°$.

Задача 3. *Как с помощью наклонной плоскости получить двукратный выигрыш? И наоборот — много ли мы проиграем, поставив наклонную плоскость под самым невыгодным углом?*

Построим графики зависимости силы тяги F от угла наклона α для а) $\mu = 0$, б) $\mu = 0{,}25$ и в) $\mu = 0{,}08$ (рис. 2).

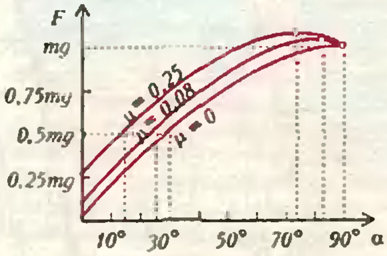
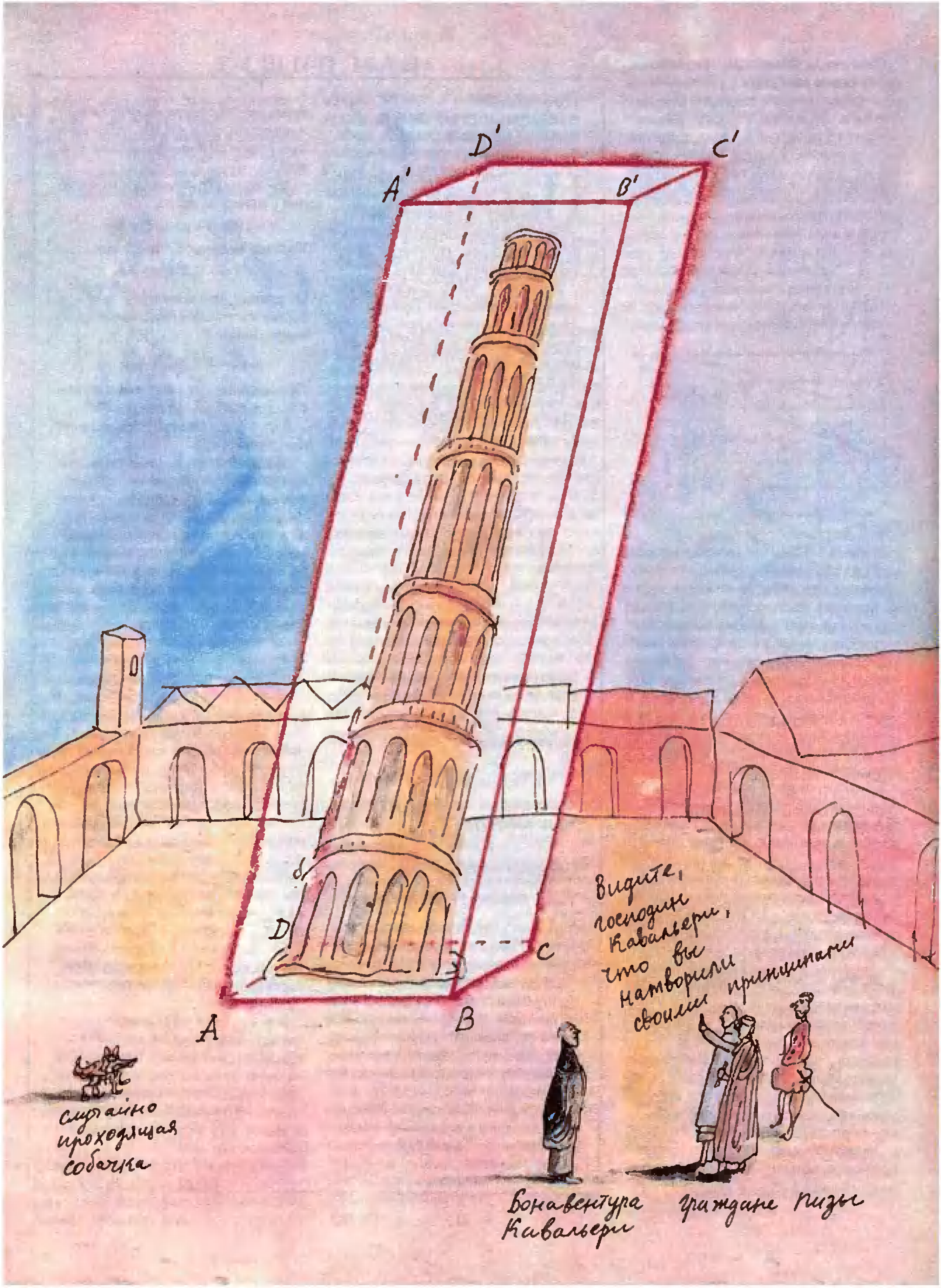


Рис. 2

Как видно, проигрываем в силе мы совсем немного — в случае а) $F_{max} = mg$ (при $\alpha = 90°$), в случае б) $F_{max} = 1{,}03mg$ (при $\alpha = 76°$) и в случае в) $F_{max} = 1{,}003mg$ (при $\alpha = 85°$). Но наклонную плоскость используют не для того, чтобы проигрывать!

А каков угол двукратного выигрыша? Его легче всего найти по графику, поскольку зависимость силы от угла на том участке, где наклонная плоскость дает выигрыш в силе, почти линейная. Из рисунка 2 видно, что этот угол составляет примерно 25°.

С. Кирбятьев


D'
C'
A'
B'
D
C
A
B
Видите, господин Кавальери, что вы натворили своими принципами
случайно проходящая собачка
Бонавентура Кавальери
граждане Пизы

Обращение принципа Кавальери

Д.ТЕРЕШИН

Если перед нами действительно глубокое утверждение, то утверждение к нему обратное окажется не менее глубоким.

Нильс Бор

При вычислении площадей криволинейных фигур и объемов тел часто оказывается полезным принцип Кавальери:

если две фигуры можно расположить на плоскости так, что любая прямая, параллельная заданной фиксированной прямой l, будет пересекать их по равным отрезкам, то площади этих фигур равны;

если два тела можно расположить в пространстве так, что любая плоскость, параллельная заданной фиксированной плоскости α, будет пересекать их по фигурам равной площади, то объемы этих тел равны.

Если вы знаете, как вычислить площадь (или объем) с помощью интеграла от длины (или площади) сечения, то доказательство принципа Кавальери не составит для вас большого труда. Если же понятие интеграла вам пока неизвестно — не беда. Можно принять этот принцип в качестве постулата и на его базе построить строгую теорию площадей и объемов. Мы не будем здесь этим заниматься, а приведем лишь один красивый пример вычисления с помощью принципа Кавальери (заинтересованный читатель может обратиться к статье В.Рабиновича в «Кванте» № 6 за 1972 год).

Покажем, как можно вычислить объем шара. (Как это делал сам Кавальери, вы можете прочитать в статье «Математический эпос Кавальери» в этом номере журнала.) Приводимое ниже рассуждение принадлежит, по существу, известному задачному композитору из Латвии Агнису Анджансу (см. задачу М1211 в «Кванте» № 8 за 1990 г., с.44). Проведем две горизонтальные плоскости, касающиеся шара, и построим тетраэдр, у которого два скрещивающихся ребра лежат в этих плоскостях, взаимно перпендикулярны и равны $2\sqrt{\pi R}$, где R — радиус шара (рис.1). Тогда сечение шара плоскостью, находящейся на расстоянии h от одной из касательных плоскостей, есть круг площадью $\pi h(2R-h)$. Сечение тетраэдра той же плоскостью — прямоугольник со сторонами $\sqrt{\pi h}$ и $\sqrt{\pi(2R-h)}$, площадь которого равна $\pi h(2R-h)$. Согласно принципу Кавальери, объем шара равен объему тетраэдра, но объем тетраэдра,

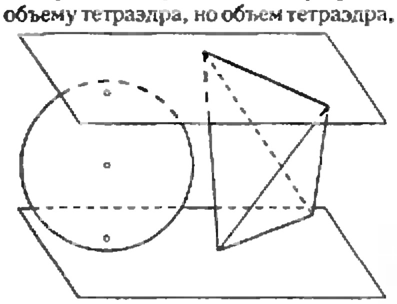


Рис. 1

два скрещивающиеся ребра которого перпендикулярны, равен одной шестой произведения длин этих ребер на расстояние между ними, т.е.

$$\frac{1}{6}\left(2\sqrt{\pi R}\right)^2 2R = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Поэтому объем шара радиусом R равен $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Другой способ вычисления объема шара с помощью принципа Кавальери вы найдете в статье М.Мамикона («Квант» №5 за 1977 г., с.10).

Теперь для удобства дальнейшего изложения сформулируем принцип Кавальери в других терминах. Во-первых, будем считать, что прямая l и плоскость α, фигурирующие в его формулировке, горизонтальны. Во-вторых, если две фигуры можно расположить так, что любая горизонтальная прямая будет пересекать их по равным отрезкам (любая горизонтальная плоскость — по фигурам равной площади), то назовем эти фигуры равными по Кавальери. Тогда более короткая формулировка принципа такова:

если две фигуры равны по Кавальери, то их площади равны.

Возникает естественный вопрос: а справедливо ли обратное утверждение? Иными словами, верно ли, что если две фигуры имеют одинаковую площадь (или объем), то они равны по Кавальери?

Рассмотрим сначала случай, когда фигуры плоские и речь идет об их площадях. Небольшие раздумья довольно быстро приводят к отрицательному ответу на поставленный вопрос. Примером могут служить круг и квадрат равной площади. Действительно, если квадрат расположен так, что ни одна из его диагоналей не является горизонтальной, то существует бесконечное множество его сечений горизонтальными прямыми, имеющих одинаковые длины; у круга же таких сечений не более двух (рис.2,а). Значит, если требуемое расположение круга и квадрата существует, то одна из диагоналей квадрата должна быть горизонтальна (рис. 2,б). Но при таком расположении площадь квадрата равна $\frac{1}{2}d^2$, а площадь круга — $\frac{1}{4}\pi d^2$, где d — диагональ квадрата (равная диаметру круга).

Не будем расстраиваться и попытаемся поставить вопрос несколько по-другому. Может быть, удастся как-то сузить класс рассматриваемых фигур так, чтобы для фигур этого класса обращение принципа Кавальери было верным? Скажем, верно ли, что если два прямоугольника имеют равные площади, то они равны по Кавальери?

Здесь автор предлагает читателю от-

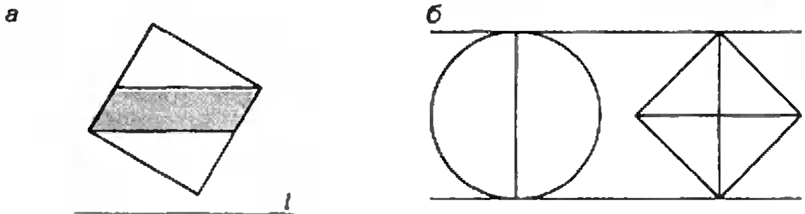


Рис. 2

ложить на время дальнейшее изучение статьи и в течение нескольких минут поразмыслить над поставленным вопросом, сформулировав для себя ответ. Если гипотеза возникла — читайте дальше.

Итак, правильный ответ: верно. Тем не менее, автору доводилось не единожды убедиться в том, что даже очень серьезные математики, которым он задавал этот вопрос, давали на него неправильный ответ. Действительно, интуитивно кажется совершенно очевидным, что квадрат и равновеликий ему очень вытянутый прямоугольник не могут быть равны по Кавальери. Однако это не так.

Рассмотрим два прямоугольника равной площади: $A_1B_1C_1D_1$ со сторонами a_1 и b_1 и $A_2B_2C_2D_2$ со сторонами a_2 и b_2. Без ограничения общности будем считать, что $a_1 < b_2$ и $a_2 < b_1$ (если $a_1 = b_2$, то и $a_2 = b_1$, в этом случае утверждение очевидно; случай $a_1 < b_2$, $b_1 < a_2$ невозможен, так как $a_1b_1 = a_2b_2$). Расположим прямоугольники так, как показано на рисунке 3. Тогда из подобия треугольников получаем, что

$$\frac{h_1}{h} = \frac{b_1 - a_2}{a_2}$$

и

$$\frac{h_2}{h} = \frac{b_2 - a_1}{a_1}.$$

Так как $a_1b_1 = a_2b_2$, то

$$\frac{b_1 - a_2}{a_2} = \frac{b_2 - a_1}{a_1},$$

следовательно, $h_1 = h_2$ и $A_1A_2 \parallel C_1C_2$. Из этого вытекает, что четырехугольники $A_1E_1C_1C_2$ и $A_2E_2C_2C_1$ — параллелограммы (значит, $A_1E_1 = A_2E_2$), и площади их равны. Тогда, в силу равенства площадей исходных прямоугольников, равны и площади треугольников $A_1B_1E_1$ и $A_2B_2E_2$, а так как $A_1E_1 = A_2E_2$, то равны их высоты, поэтому $B_1B_2 \parallel A_1A_2$. Четырехугольник $B_1B_2A_2E_1$ — параллелограмм ($B_1E_1 \parallel A_2B_2$ и $B_1B_2 \parallel A_1A_2$), значит, $B_1E_1 = A_2B_2 = a_2$. Аналогично, $B_2E_2 = A_1B_1 = a_1$. Следовательно, треугольники $A_1B_1E_1$ и $E_2B_2A_2$ равны по двум катетам. Из этого следует, что любая горизонтальная прямая, пересекающая эти треугольники, пересекает их по равным отрезкам. Если же горизонтальная прямая пересекает параллелограммы $A_1E_1C_1C_2$ и $A_2E_2C_2C_1$ или совпадающие треугольники $C_1D_2C_2$ и $C_1D_1C_2$, то равенство соответствующих отрезков очевидно.

Тем самым доказана следующая

Теорема 1. *Если два прямоугольника равновелики, то они равны по Кавальери.*

Эту теорему предлагалось доказать десятиклассникам на заключительном этапе Российской олимпиады по математике 1993 года. Приятно отметить, что большинство участников олимпиады справились с этой задачей успешно.

Попробуем продвинуться еще дальше: верно ли, что если два треугольника равновелики, то они равны по Кавальери? Попытки предъявить конкретное расположение треугольников, подобно тому, как это было сделано в случае с прямоугольниками, к успеху не приводят. Пример не равных по Кавальери равновеликих треугольников вроде бы тоже не получается построить. Это не случайно. Оказывается, справедлива

Теорема 2. *Если два треугольника равновелики, то они равны по Кавальери.*

Докажем эту теорему. Прежде всего, заметим, что если на сторонах A_1B_1 и A_2B_2 данных равновеликих треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ найдутся точки M_1 и M_2, соответственно, такие что $C_1M_1 = C_2M_2$ и площади треугольников $C_1A_1M_1$ и $C_2A_2M_2$ равны, то достаточно расположить треугольники так, чтобы точки C_1, M_1, C_2 и M_2 лежали на горизонтальной прямой. Действительно (рис.4), из подобия треугольников немедленно получаем, что $l_1/L = h/H$ и $l_2/L = h/H$, откуда $l_1 = l_2$ (аналогично, если прямая пересекает треугольники $M_1B_1C_1$ и $M_2B_2C_2$, площади которых также равны). Остается доказать лишь существование точек M_1 и M_2. При этом нам не важно, на каких именно сторонах треугольников они лежат, так как мы всегда можем нужным образом изменить обозначения.

Посмотрим, как изменится длина l отрезка, соединяющего точку на стороне треугольника с противоположной его вершиной, в зависимости от площади S треугольника, заметаемой этим отрезком при движении точки по стороне.

Итак, пусть сначала точка M движется по стороне AB треугольника ABC единичной площади (рис. 5). При этом площадь S изменяется от 0 до 1, а длина l — от b до a. Пусть теперь точка M движется по стороне AC от точки C к точке A. Будем считать, что при этом площадь S изменяется от 1 до 2 (мы

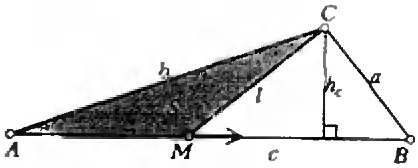


Рис. 5

«проходим» площадь треугольника ABC еще раз!). Длина l меняется от a до c. Наконец, пусть точка M движется по стороне BC от B к C. Площадь S изменяется от 2 до 3, а длина l — от c до a.

Нарисуем примерный график функции $l(S)$; он показан на рисунке 6. Ясно, что если два графика $l_1(S)$ и $l_2(s)$, построенные аналогичным образом для равновеликих треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ (площадь которых будем считать единичной), пересекаются, то это и означает существование нужных нам точек M_1 и M_2. Но почему эти графики должны пересекаться? А вот почему: обе функции $l_1(S)$ и $l_2(S)$ обладают следующим замечательным свойством — они непрерывны (это достаточно очевидно из их построения) и

$$\min_{S\in[0;3]} l_1(S) \cdot \max_{S\in[0;3]} l_1(S) = \min_{S\in[0;3]} l_2(S) \cdot \max_{S\in[0;3]} l_2(S).$$

Действительно, чему равно наименьшее значение каждой из этих функций? — наименьшей высоте соответствую-

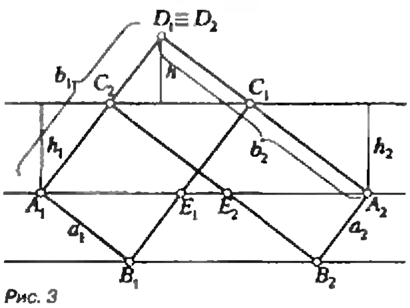


Рис. 3

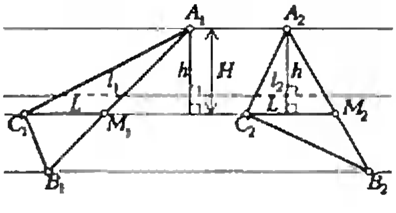


Рис. 4

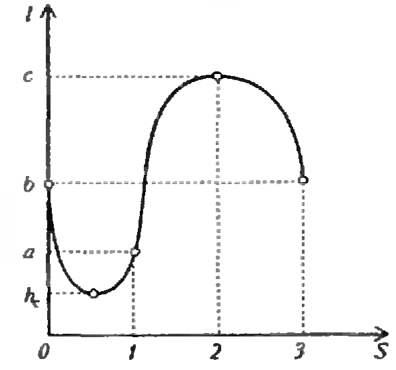


Рис. 6

го треугольника. А наибольшее значение? — наибольшей стороне треугольника. Поэтому оба произведения, написанные выше, равны удвоенной площади треугольника ($A_1B_1C_1$ или $A_2B_2C_2$ — все равно), т.е. двум! Остается показать, что это равенство влечет пересечение графиков, т.е. существование $S_0 \in [0;3]$ такого, что $l_1(S_0) = l_2(S_0)$. Пусть это не так и, например, $l_1(S) > l_2(S)$ для всех $S \in [0;3]$. Тогда найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что $l_1(S) > l_2(S) + \varepsilon$ для всех $S \in [0;3]$, т.е.

$$\max_{S\in[0;3]} l_1(S) \geq \max_{S\in[0;3]} l_2(S) + \varepsilon.$$

В то же время $\min\limits_{S\in[0;3]} l_1(S) \geq \min\limits_{S\in[0;3]} l_2(S)$.

Откуда следует, что

$$2 = \min_{S\in[0;3]} l_1(S) \cdot \max_{S\in[0;3]} l_1(S) \geq$$

$$\geq \left(\max_{S\in[0;3]} l_2(S) + \varepsilon\right) \min_{S\in[0;3]} l_2(S) =$$

$$= 2 + \varepsilon \min_{S\in[0;3]} l_2(S).$$

Так как $l_2(S) > 0$, то и $\min\limits_{S\in[0;3]} l_2(S) > 0$. Тем самым, мы получили противоречие. Теорема доказана.

Этот результат давно был известен в математическом фольклоре, но на русском языке, по-видимому, никогда не публиковался. Приведенное выше доказательство заимствовано из книги замечательного американского математика (венгерского происхождения) Пола Халмоша «Problems for mathematicians, Young and Old», недавно изданной в США. Халмош ссылается на Ховарда Ивза, полагая, тем не менее, что Ивз лишь переоткрыл эту теорему, а точное имя ее автора назвать не представляется возможным.

Что касается дальнейших продвижений, то довольно просто доказывается, что равновеликие параллелограммы равны по Кавальери (предлагаем читателям доказать это самостоятельно). Кроме того, если n-угольник и m-угольник равновелики, то при $n \neq m$ они, вообще говоря, не обязаны быть равными по Кавальери (постройте соответствующие примеры). Больше ничего относительно этой проблематики на плоскости, по-видимому, неизвестно.

Попытаемся теперь обратить пространственный принцип Кавальери. Для произвольных тел обратное утверждение, конечно же, неверно. В качестве примера подойдут равновеликие куб и шар. Доказательство мы оставляем как упражнение для читателя, а сами займемся доказательством следующего утверждения.

Теорема 3. *Если два прямоугольных параллелепипеда равновелики, то они равны по Кавальери.*

Доказательство, которое мы изложим ниже, было предложено одним из победителей заключительного этапа Российской математической олимпиады 1993 года (соответствующая задача предлагалась учащимся 11 класса) Романом Федоровым из 57-й московской школы, ставшим впоследствии золотым медалистом Международной математической олимпиады 1993 года.

Итак, пусть даны два прямоугольных параллелепипеда равного объема. Рассмотрим вспомогательный третий прямоугольный параллелепипед этого же объема, имеющий общее ребро как с первым, так и со вторым из данных параллелепипедов. Оказывается, что первый и третий параллелепипеды можно расположить в пространстве так, что если прямая, параллельная некоторой прямой l_1, пересекает первый параллелепипед, то она пересекает и третий, причем по отрезку той же длины. Действительно, если совместить их равные ребра, то сечения параллелепипедов плоскостью, перпендикулярной этим ребрам, будут равновеликими прямоугольниками. Тогда существование нужной нам прямой l_1 вытекает из доказательства теоремы 1. Аналогично найдем прямую l_2, обладающую тем свойством, что если прямая, параллельная l_2, пересекает второй параллелепипед, то она пересекает и третий, причем по отрезку той же длины. Возьмем теперь плоскость, параллельную l_1 и l_2, и повернем всю конструкцию так, чтобы эта плоскость стала горизонтальной. В произвольной горизонтальной плоскости рассмотрим прямые, параллельные прямой l_1. Они пересекают и третий параллелепипед, причем по отрезкам той же длины. Поэтому, согласно принципу Кавальери (плоскому), сечения первого и третьего параллелепипедов этой плоскостью равновелики. Рассматривая теперь прямые, параллельные прямой l_2, аналогично получаем, что сечения второго и третьего параллелепипедов горизонтальной плоскостью равновелики. Следовательно, и сечения первого и второго параллелепипедов произвольной горизонтальной плоскостью, пересекающей их, равновелики. Теорема доказана.

Хочется обратить внимание читателей на остроумное использование в этом доказательстве самого принципа Кавальери (правда, плоского). Это рассуждение чем-то напоминает известное доказательство теоремы, обратной к теореме Пифагора, с помощью самой теоремы Пифагора, примененной к подходящим образом выбранному вспомогательному прямоугольному треугольнику (затем используется равенство треугольников по трем сторонам).

Возможны, конечно, и другие способы доказательства теоремы 3. Одно из них позволяет отказаться в формулировке теоремы от условия прямоугольности параллелепипедов, тем самым усилив ее. Идея этого доказательства по существу совпадает с идеей доказательства теоремы 2. Оказывается, что на ребрах AA' и $A_1'A_1$ параллелепипедов можно найти точки M и M_1 такие, что равны площади треугольников MBD и $M_1B_1D_1$ и объемы тетраэдров $AMBD$ и $A_1M_1B_1D_1$ (рис.7). Тогда расположение параллелепипедов, при котором плоскости MBD и $M_1B_1D_1$ совпадают и горизонтальны, удовлетворяет нужному условию. Попробуйте восстановить все детали этого доказательства самостоятельно.

В заключение отметим, что если два тетраэдра равновелики, то они равны по Кавальери, но простое доказательство этого факта нам неизвестно. Быть может, кому-то из читателей удастся его получить?

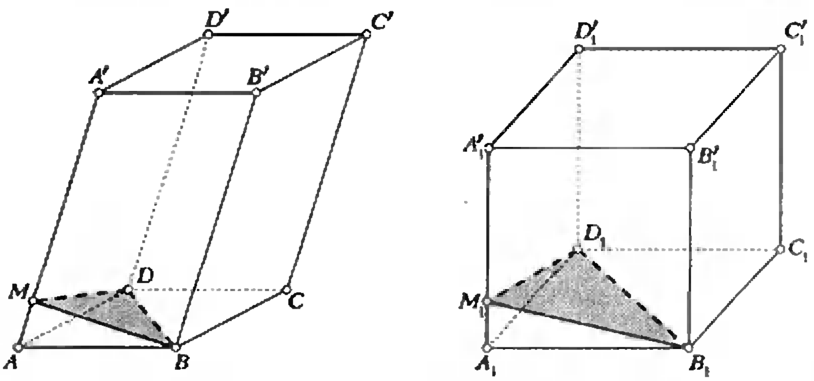


Рис. 7


m
F
S
P
Крымов

На лезвии меча

В. МЕЩЕРЯКОВ

В ОДНОМ из ноябрьских 1992 года номеров «Московского комсомольца» был опубликован вдохновенный очерк Александра Погончеикова «Сальто на лезвии меча». О похожей на сказку судьбе мастера Сидэо Киил, шестидесятилетнего мудреца с телом атлета, владеющего таинствами древнего воинского искусства Ки Хаб, и его двадцатилетней жены Эллы. Вот выдержка: «Он встает на лезвие и, слегка опираясь на руку молодой ассистентки, начинает движение по мечу. Шаг... Второй... Третий... разворот... шаг назад... и... прыжок. Кажется, что вот-вот из подошв выступающего хлынет кровь. Но этого не происходит...»

Почему? Ответ не кажется простым или неинтересным. И можно сделать предварительные оценки площади контакта, давления, числа опорных атомов, но стоит ли прикасаться подобной прозой к столь величественной гармонии? Об этом судить вам.

Попытаемся сначала рассмотреть физическую сторону этого уникального эксперимента с помощью предельно простого подхода. Измерив S_0 — площадь ступни человека, например с помощью прорисовки ее контура на бумаге в клеточку, получим, что $S_0 \sim 10^{-2}$ м^2. При массе человека $M \sim 10^2$ кг имеем силу тяжести $F = Mg \approx 10^3$ Н, которая является внешней нагрузкой для площади S_0, если человек стоит на плоской опоре. В этом случае давление

$$p_0 = F / S_0 \sim 10^5 \text{ Н / м}^2 = 1 \text{ атм}. \quad (1)$$

Когда человек стоит на лезвии меча, такая же внешняя нагрузка приходится на существенно меньшую площадь контакта. Для ее оценки воспользуемся известным фактом, что при полировке и притирке металлов можно достичь высоты поверхностных шероховатостей порядка долей микрона. Поэтому примем, что заточка лезвия перед его употреблением приводит к ширине края лезвия $b \sim 10^{-7}$ м. Полагая длину ступни человека $a \sim 10^{-1}$ м, получим площадь соприкосновения ступни и меча $S_1 \sim 10^{-8}$ м^2, и давление

$$p_1 = F / S_1 \sim 10^6 \text{ атм}. \quad (2)$$

Оценка (2) попадает в диапазон давлений, которые, например, имеют место в центре Земли под толщей ее многокилометровых пластов. Этот результат настораживает. А может ли действительно человек стоять на «остром как бритва» лезвии меча без разрыва мышечных тканей его ступней? То есть, не надувательство ли это типа приклеивания тонких прочных подметок или массового гипноза? Давайте разбираться, для чего вновь рассмотрим данную ситуацию, но теперь уже с точки зрения атомистической структуры материи.

Вспомним, что человек состоит из атомов. Кожа — тоже. Поэтому уместно поставить следующий вопрос. На скольких атомах стоит человек? И прежде чем на него ответить, сделаем оценки числа атомов, образующих площади контактов S_0 и S_1.

Характерное значение объема, приходящегося на 1 атом в конденсированных состояниях вещества, составляет величину $\Omega \sim 10^{-29}$ м^3. Следовательно, один поверхностный атом образует элементарную площадку $s \sim \Omega^{2/3} \sim 10^{-20}$ м^2. Тогда число атомов на площади S_0, соответствующей стоянию человека на полу,

$$n_0 = S_0 / s \sim 10^{18}, \quad (3)$$

а на площади S_1, соответствующей стоянию на мече,

$$n_1 = S_1 / s \sim 10^{12}. \quad (4)$$

Получается, что переход человека с пола на меч эквивалентен замене 10^{18} опорных атомов на 10^{12}. Это разочаровывает. Различие между этими двумя величинами трудно себе представить. Однако являются ли n_0 и n_1 числом атомов, на которых человек стоит? Оценки (3) и (4) соответствуют контурным площадям контактов. Именно для подчеркивания этого факта предлагалось (с боязнью вызвать неодобрение подготовленного читателя) оценить одну из этих площадей прорисовкой контура на бумаге. Но где гарантия того, что все атомы, попавшие внутрь контура, являются опорными?

Оценки (3) и (4) не показывают также, до какого предела можно уменьшать n_1. Другими словами, где же те критические значения числа атомов n_1 и, соответственно, ширины лезвия b, после которых прогулки по мечу могут оказаться принципиально невозможными?

Для ответа на накопившиеся вопросы обратимся к идее английского физика И. Томлинсона, высказанной им еще в 1929 году. (Об этом можно прочитать, например, в книге А.А.Силина «Трение и мы» — выпуск 57 «Библиотечки «Квант».) Коротко суть идеи состоит в том, что контакт тел обеспечивается ограниченным числом атомов, зависящим от внешней нагрузки. Эти атомы Томлинсон назвал «кариатидами» (от греческого karyátis — женская статуя, поддерживающая, подобно колонне, что-либо). Число кариатид является основной характеристикой контакта твердых тел, и нам следует провести его оценку и сравнить с величинами n_0 и n_1. Для этого рассмотрим следующую модельную ситуацию.

Представим, что твердое тело, имеющее произвольный микрорельеф поверхности, приближено к плоскости статической абсолютно жесткой опоры до ее соприкосновения с одним из атомов. Воздействуя на твердое тело небольшой силой F, направленной перпендикулярно плоскости опоры, можно получить упругую деформацию выступа поверхности, которому принадлежит атом-кариатида. Если же сила F будет превосходить некоторое критическое значение f, обусловленное характером межатомных связей, то атом совершит диффузионный переход. Иначе говоря, атом выдавится из первого атомного слоя опирающейся поверхности. Диффузионное разрушение первого атомного слоя, а затем и последующих, будет происходить до тех пор, пока число кариатид не станет равным

$$n = F/f. \quad (5)$$

Критическая сила f не должна превосходить величину работы E по перемещению атома, отнесенную к межатомному расстоянию:

$$f = E / \Omega^{1/3}. \quad (6)$$

Величина E называется также энергией диффузии. (О различных путях ее вычисления можно прочитать, скажем, в книге Б.С.Бокштейна «Атомы блуждают по кристаллу» — выпуск 28 «Библиотечки «Квант».) Для грубой оценки E можно принять, что она равна электростатической энергии, приходящейся на один атом:

$$E \sim ke^2 / r \sim ke^2 / \Omega^{1/3}.$$

Для металлов характерное значение $E \sim 10^{-18}$ Дж.

Подстановка выражения (6) в (5) позволяет получить формулу для оценки числа кариатид:

$$n = F\Omega^{1/3} / E. \qquad (7)$$

Сразу же обратим внимание, что n не зависит от контурной площади контакта. Это согласуется с рассуждениями Томлинсона, экспериментальное подтверждение которых проявляется в существовании линейной зависимости силы трения от внешней нагрузки для случая силового взаимодействия двух твердых тел ($F_{тр} = \mu N$).

Результат (7) позволяет определить фактическую площадь контакта S_r, которая должна быть равна произведению числа кариатид n на элементарную площадку s. Используя формулу (7), получим

$$S_r = ns = F\Omega / E. \qquad (8)$$

Величина S_r, как видно, так же как и n, определяется только атомными свойствами деформируемого на жесткой опоре тела и внешней нагрузкой.

А теперь на лезвие меча попытается встать, в своем роде, автор этой статьи, делая количественные оценки по полученным формулам и качественные выводы, из них вытекающие.

Используя характерные значения атомного объема Ω, внешней силы F и энергии E, по формуле (7) получим

$$n \sim 10^{11}. \qquad (9)$$

Таким образом, статическое положение человека в гравитационном поле Земли обеспечивается числом кариатид, равным по порядку величины 10^{11}, и не зависит ни от формы или площади опоры, ни от того, каким местом своего тела человек на нее опирается. Эта величина на 7 порядков меньше, чем число атомов, попадающих в контур ступни:

$$n_0 / n \sim 10^7. \qquad (10)$$

Результат (10) говорит о том, что из каждых 10^7 атомов поверхности ступни лишь один атом выполняет функции кариатиды. Но, пожалуй, самое любопытное здесь то, что данное число кариатид устанавливается не сразу, а в процессе разрушения поверхностных слоев кожи путем перераспределения ее атомов. Представьте, вы пальцем надавили на стол, допустим, с силой 1 Н. Критическая сила для отрыва поверхностного атома кожи пальца от других атомов равна $f \sim 10^{-8}$ Н, что следует из формулы (6) и принятых значений E и Ω. Очевидно, усилие в 1 Н ломает межатомные связи катастрофически, приводя в итоге к установлению равновесного числа кариатид, равного в этом примере величине $\sim 10^{-8}$.

Сравнение результата (9) с числом атомов n_1, содержащихся внутри опорного контура на мече, позволяет предположить, что принятая выше заточка лезвия оказалась более широкой, чем та, которая соответствовала бы плотному размещению равновесного числа кариатид (9). Ширину лезвия меча возможно уменьшить без нарушения условия (9) до величины $b_r = S_r / a$. Используя формулу (8), получим

$$b_r = F\Omega / (Ea) \sim 10^{-7} - 10^{-8} \text{м}. \quad (11)$$

Из приведенных оценок следует, что статическое равновесие человека на лезвии меча без существенной деформации мышечных тканей возможно при ширине края лезвия не менее 10^{-8} м. А переход человека с пола на меч в этом случае эквивалентен замене кариатид, хаотично распределенных в плоскости, на такое же число плотно упакованных кариатид, выстроенных шеренгой с поперечным числом атомов $n_\perp = b_r / \Omega^{1/3} \sim 10^2$ и продольным — $n_\parallel = a / \Omega^{1/3} \sim 10^9$. Произведение $n_\perp \cdot n_\parallel = n \sim 10^{11}$ и соответствует оценке (9).

Надеюсь, вам понравилось столь простое, хотя и вполне прозаическое, объяснение древнего таинства. Впрочем, для многих (и для меня в том числе) гармония формул сродни волшебству... Жаль только, что последний наш вывод не вполне согласуется с природой. В действительности тепловое движение атомов размывает плоские участки поверхности кристаллов, приводя к образованию одноатомных ступенек и исчезновению ребер, что не позволяет заточить меч до образования стройной ограненной шеренги шириною в сотню межатомных расстояний. По-видимому, именно это естественное уширение b_r позволяет не только не заботиться о заточке меча, но и, предоставляя избыточную площадь, прыгать на нем, выполняя, например, сальто-мортале.

В заключение несколько замечаний.

1. Автору неизвестны прямые экспериментальные измерения, которые могли бы подтвердить или опровергнуть приведенные оценки. Метод атомно-силовой микроскопии, наиболее близкий описываемой ситуации и реализующий контролируемый контакт твердой поверхности с одноатомным острием, не дает пока возможности исследовать динамику образования многоатомного контакта.

2. Надо признать, что приведенные оценки довольно-таки грубы, во-первых, из-за использования свойств средних по таблице Менделеева элементов и, следовательно, без учета элементного строения кожи человеческого тела. Во-вторых, из-за ошибки округления до порядка величины значений параметров, вычисленных возведением в степени 1/3 и 2/3 атомного объема Ω. Улучшение точности оценок лишено смысла в силу первого замечания.

3. Не следует из написанного делать вывод о том, что человек может безболезненно опираться на лезвие меча любой частью своего тела. Разные участки кожи и мышечных тканей под ними различаются упругими и прочностными характеристиками, что не принималось в расчет. По-видимому, кожа ступней обладает некоторыми преимуществами в этом смертельном эксперименте, проводимом на границе человеческих возможностей.

4. Изменением огранки кристаллов в зависимости от температуры интересовались такие знаменитости, как П.Эренфест и Л.Ландау, но лишь в последние 10 лет удалось достичь его количественного описания. Возможно, найдется специалист, который, прочитав эту статью, напишет другую, которая дополнит наше исследование анализом этого явления.

5. Проблема разрыва мышечных тканей под воздействием внешних тел более сложна. Очевидно, она связана с переходом от трения покоя к трению скольжения, к раскрытию загадки которого физики приблизились лишь недавно. Те, кто захочет принять участие в этом исследовании, могут начать свою подготовку с прочтения статьи И.Ш.Слободецкого «Сухое трение» — «Квант», № 1, 1970 г. или «Квант», № 8, 1986 г.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 июля 1994 года по адресу: 103006 Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 2 — 94" и номера задач, решения которых Вы посылаете, например М1421 или Ф1428. В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1421—М1430, Ф1428—Ф1437

М1421. а) В выпуклый четырехугольник $ABCD$, у которого углы при вершинах B и D — прямые, вписан четырехугольник с периметром P (его вершины лежат по одной на сторонах четырехугольника $ABCD$). Докажите неравенство $P \ge 2BD$.
б) В каких случаях это неравенство превращается в равенство?
Г. Нерсисян (Армения)

М1422. Докажите, что числа 312500051 и 1280000401 — составные.
А. Егоров

М1423. Три шахматиста A, B и C сыграли матч-турнир (каждый с каждым сыграл одинаковое число партий). Может ли случиться, что по числу очков A занял первое место, C — последнее, а по числу побед, наоборот, A занял последнее место, C — первое (за победу присуждается одно очко, за ничью — пол-очка)?
А. Рубин

М1424. В строчку выписано 10 целых чисел. Вторая строчка находится так: под каждым числом A первой строчки пишется число, равное количеству чисел первой строчки, которые больше A и при этом стоят правее A. По второй строчке аналогично строится третья строчка и т.д.
а) Докажите, что все строчки, начиная с некоторой, нулевые (состоят из сплошных нулей).
б) Каково максимально возможное число ненулевых строчек (содержащих хотя бы одно число, отличное от нуля)?
С. Токарев

М1425. Дан невыпуклый несамопересекающийся четырехугольник, который имеет три внутренних угла по 45°. Докажите, что середины его сторон лежат в вершинах квадрата.
В. Произволов

М1426. Через $S(n)$ обозначим сумму цифр числа n (в десятичной записи). Существуют ли три различных числа m, n и p таких, что
$m + S(m) = n + S(n) = p + S(p)$?
М. Гервер

М1427. В каждой клетке квадрата 8×8 клеток проведена одна из диагоналей. Рассмотрим объединение этих 64 диагоналей. Оно состоит из нескольких связных частей (к одной части относятся точки, между которыми можно пройти по одной или нескольким диагоналям). Может ли количество этих частей быть а) больше 15? б) больше 20?
в) Может ли в аналогичной задаче про квадрат $n \times n$ клеток получиться больше чем $n^2 / 4$ частей (для $n>8$)?
Н. Васильев

М1428. Подряд выписаны десятичные записи всех натуральных чисел, начиная с единицы, до некоторого n включительно:
12345678910111213... (n). Существует ли такое n, что в этой записи все десять цифр встречаются одинаковое количество раз?
А. Анджанс

М1429. Выпуклый многоугольник разрезан на выпуклые семиугольники (так, что каждая сторона многоугольника является стороной одного из семиугольников). Докажите,

что найдутся четыре соседние вершины многоугольника, принадлежащие одному семиугольнику.
А.Белов

М1430. Монотонно возрастающая последовательность целых чисел $\{a_n\}$ обладает тем свойством, что для любой пары взаимно простых чисел p и q выполняется равенство: $a_{pq} = a_p a_q$; кроме того, известно, что $a_1 = 1$; $a_2 = 2$.
а) Докажите, что $a_3 = 3$.
б) Докажите, что $a_n = n$ для любого натурального n.
(Взаимно простыми называются числа, не имеющие общего делителя.)
В.Сендеров

Ф1428. Математический маятник совершает колебания в вертикальной плоскости с очень малой угловой амплитудой α_0. Скорость грузика в нижней точке составляет v_0. В тот момент, когда грузик достигает крайней точки, ему толчком сообщают скорость v_0 в направлении, перпендикулярном плоскости его прежних колебаний. По какой траектории будет в дальнейшем двигаться грузик? Через какое время он снова окажется в точке удара?
А.Алексеев

Ф1429. «Полировочная» машина прошла по льду, оставив за собой полосу, на которой коэффициент трения скольжения μ_2 меньше коэффициента трения μ_1 на нетронутом льду. Раскрученную вокруг вертикальной оси шайбу кладут плашмя на лед так, что центр шайбы приходится на границу раздела полос. Найдите ускорение шайбы в начальный момент. Перепада высот на границе нет.
Л.Маркович

Ф1430. На гладкий горизонтальный стержень надеты две маленькие шайбы, массы которых m и $2m$, связанные легкой нитью длиной $2l$ (рис. 1). К середине нити прикреплен еще один груз массой m. Вначале все грузы удерживают так, что натянутая нить горизонтальна, а растяжение ее мало (разумеется, для этого приходится придерживать средний груз), а затем – отпускают. Найдите скорости шайб перед ударом друг о друга.
А.Зильберман

Ф1431. Когда я хочу помыть трехлитровую банку, я наливаю в нее литр горячей воды и начинаю интенсивно

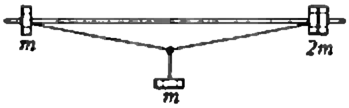


Рис. 1

трясти банку, закрыв ее ладонью. Меня иногда удивляет сила, которая давит на ладонь, когда вода стремится вырваться и обрызгать меня. Оцените величину этой силы. Необходимые для оценки данные хорошо известны.
А.Дешковский

Ф1432. Мыльный пузырь надувают азотом при комнатной температуре. При каком диаметре пузыря он начнет «всплывать» в атмосферном воздухе? Поверхностное натяжение мыльного раствора $\sigma = 0{,}04$ Н/м. Весом пленки пренебрегите.
А.Шеронов

Ф1433. Электрон налетает на систему заряженных сеток (рис. 2). Сетки расположены параллельно друг другу, расстояние между соседними сетками d, площадь каждой S (размеры сеток во много раз больше d). Всего сеток $2N$, их заряды чередуются: $-Q, +Q, -Q, +Q, \ldots, +Q$. Скорость электрона при подлете к системе равна v_0 и составляет угол α с осью системы. Найдите скорость и угол вылета электрона из системы. Какую скорость будет иметь электрон на большом расстоянии от системы?
Д.Семенцов

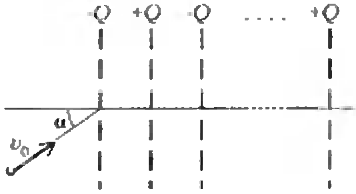


Рис. 2

Ф1434. Квадратная рамка, сделанная из проволоки диаметром d_0, находится вблизи длинного прямого провода с током I_0 (рис. 3). При выключении тока рамка приобретает импульс p_0. Куда направлен этот импульс? Какой импульс получила бы рамка, если бы начальный ток в проводе составлял $I = 3I_0$, а диаметр проволоки рамки был $d = 2d_0$?
В.Можаев

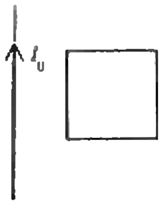


Рис. 3

Ф1435. В схеме, изображенной на рисунке 4, напряжение батарейки равно $\mathcal{E}$, а конденсатор заряжен до напряжения $U = 2\mathcal{E}$. После того как ток в катушке практически перестал изменяться, ключ замкнули. Через какое время после этого заряд конденсатора изменится на 1%? Во сколько раз за это время изменится ток через катушку? Сопротивления резисторов $R = 100$ Ом, емкость конденсатора $C = 10$ мкФ, индуктивность катушки $L = 1$ Гн.

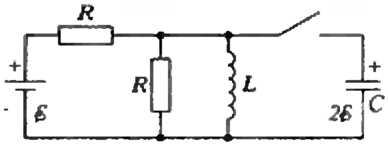


Рис. 4

З.Рафаилов

Ф1436. Настраивая микроскоп, читатель журнала «Квант» обнаружил, что он четко видит обоими глазами изображение объекта, когда тот расположен на расстоянии $d = 6{,}5$ мм от объектива. Длина тубуса микроскопа $L = 100$ мм. Фокусное расстояние объектива $F_1 = 6$ мм, окуляра $F_2 = 26$ мм. Какие очки следует носить читателю?
А.Юдин

Ф1437. Узкий пучок света диаметром $d = 1$ см падает перпендикулярно на экран. На пути пучка помещают прозрачный шар радиусом $R = 20$ см, сделанный из материала с коэффициентом преломления $n = 2$ (дорогая штука, между прочим! — *прим. ред.*). Центр шара находится на оси пучка на расстоянии $L = 1$ м от экрана. Найдите диаметр пятна на экране.
Л.Маркович, А.Слободянюк

Решения задач М1391—М1400, Ф1408—Ф1417

М1391. *а) На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены правильные треугольники ABC_1, BCA_1, CAB_1; A_2, B_2, C_2 — середины отрезков B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Докажите, что прямые AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке или параллельны.*

б) Докажите аналогичное утверждение, если ABC_1, BCA_1, CAB_1 — подобные равнобедренные треугольники (с основаниями AB, BC, CA.)

Решим сразу задачу б). Одно из наиболее естественных решений использует векторы и операции над ними. Введем обозначения так, как показано на рисунке 1. Легко видеть, что сумма векторов $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ равна нулевому вектору. Это доказывается такой перегруппировкой суммы:

$$\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\left(\vec{b}''+\vec{c}'\right)/2+\left(\vec{c}''+\vec{a}'\right)/2+\left(\vec{a}''+\vec{b}'\right)/2=$$

$$\left(\vec{a}+\vec{a}''\right)/2+\left(\vec{b}'+\vec{b}''\right)/2+\left(\vec{c}'+\vec{c}''\right)/2=\vec{k}+\vec{l}+\vec{m}. \quad (1)$$

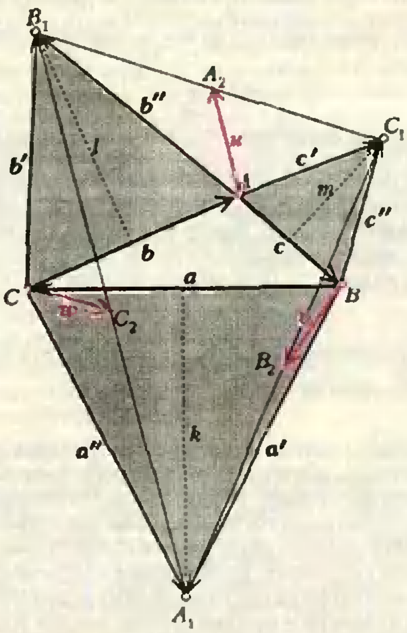


Рис. 1

Последняя сумма равна нулю, поскольку тройка $\vec{k}$, $\vec{l}$, $\vec{m}$ получается из тройки $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (с суммой $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$) поворотом на 90° и умножением на некоторое число (удвоенный тангенс угла при основаниях равнобедренных треугольников ABC_1, BCA_1, CAB_1).

Чтобы доказать, что прямые AA_2, BB_2, CC_2 проходят через одну точку, удобно рассмотреть векторы $\vec{u}=\overrightarrow{AA_2}$, $\vec{v}=\overrightarrow{BB_2}$, $\vec{w}=\overrightarrow{CC_2}$ как силы, приложенные к твердой пластине, и использовать известное из статики понятие момента силы. Нужное нам условие состоит в том, что сумма этих моментов равна нулю.

По определению, момент силы $\overrightarrow{PQ}$ относительно некоторой точки O равен произведению силы на плечо (с учетом знака, указывающего «направление вращения»: на рисунке 2,*а* момент положителен, на рисунке 2,*б* — отрицателен):

$$S_O\left(\overrightarrow{PQ}\right)=\left[\overrightarrow{OP},\overrightarrow{PQ}\right]=OP\cdot PQ\sin\alpha,$$

где α — угол между направлениями OP и PQ.
Операция $[\vec{r},\vec{t}\,]$ называется псевдоскалярным произведением векторов $\vec{r}$ и $\vec{t}$. Отметим такие свойства моментов и псевдоскалярных произведений:

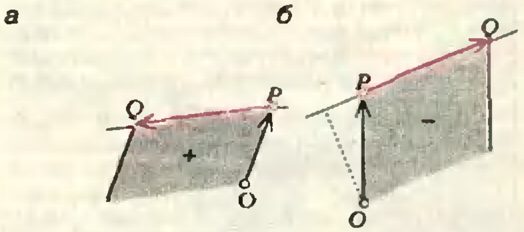


Рис. 2

1. Если силы $\vec{u}$, $\vec{v}$ и $\vec{u}+\vec{v}$ приложены в одной точке и $\vec{u}+\vec{v}=\vec{w}$, то

$$S_O(\vec{w})=S_O(\vec{u})+S_O(\vec{v}),$$

т.е. для любого вектора $\vec{p}$

$$[\vec{p},\vec{u}]+[\vec{p},\vec{v}]=[\vec{p},\vec{u}+\vec{v}]$$

(это легко доказать, выразив псевдоскалярное произведение $\left[\overrightarrow{OP},\overrightarrow{PQ}\right]=S_O\left(\overrightarrow{PQ}\right)$ как скалярное произведение $\overrightarrow{PQ}$ на вектор, полученный поворотом $\overrightarrow{OP}$ на угол 90°).

2. Если сумма трех сил как векторов равна нулю, то сумма их моментов не зависит от выбора точки O.
(В самом деле, если $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}$, то разность между суммами моментов $S_O(\vec{u})+S_O(\vec{v})+S_O(\vec{w})$ и $S_{O'}(\vec{u})+S_{O'}(\vec{v})+S_{O'}(\vec{w})$ равна

$$\left[\overrightarrow{OO'},\ \vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\right]=\vec{0}.)$$

3. Если $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{CR}=\vec{0}$, то сумма моментов трех ненулевых сил $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{BQ}$, $\overrightarrow{CR}$ равна 0 в том и только том случае, если прямые AP, BQ, CR проходят через одну точку или параллельны.
(Действительно, если взять за O точку пересечения каких-то двух из этих прямых, то соответствующие два момента равны 0, а третий будет нулевым в том и только в том случае, когда третья прямая проходит через ту же точку.)

Теперь задача решается точно такой же перегруппировкой слагаемых, как выше (см. формулу (1)), но для суммы моментов (указание в индексе на точку O мы опускаем):

$$S(\vec{u})+S(\vec{v})+S(\vec{w})=$$

$$=\left(S\left(\vec{b}''\right)+S\left(\vec{c}'\right)\right)/2+\left(S\left(\vec{c}''\right)+S\left(\vec{a}'\right)\right)/2+\left(S\left(\vec{a}''\right)+S\left(\vec{b}'\right)\right)/2=$$

$$\ldots=S\left(\vec{k}\right)+S\left(\vec{l}\right)+S(\vec{m}),$$

а последняя сумма равна нулю, поскольку серединные перпендикуляры к сторонам треугольника проходят через одну точку; это и означает, что прямые, на которых лежат силы $\vec{u}$, $\vec{v}$ и $\vec{w}$, проходят через одну точку.

Наметим еще одно, чисто геометрическое решение, предложенное *В.Дубровским*. Построим точку B_0 так, что углы B_0CB_1 и B_0AB_1 — прямые, и аналогично — точки C_0 и A_0 (рис.3). Используя поворот на 90°, нетрудно доказать, что $AA_2 \perp B_0C_0$; таким образом, прямая AA_2 — множество точек, разность квадратов расстояний от которых до точек B_0 и C_0 равна $AB_0^2 - AC_0^2$. Рассуждая аналогично для двух других прямых, убедимся, что все они проходят через одну точку, поскольку

$$\left(AB_0^2 - AC_0^2\right) + \left(BC_0^2 - BA_0^2\right) + \left(CA_0^2 - CB_0^2\right) = 0.$$

Н.Васильев

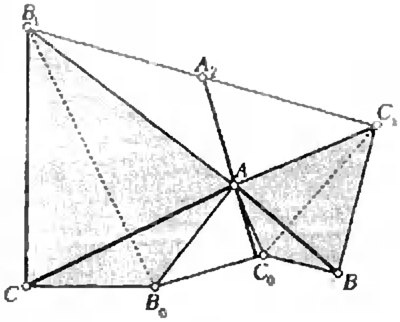
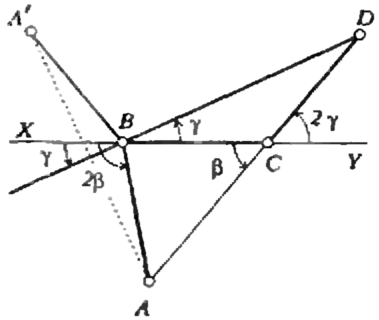


Рис. 3

М1392. *На плоскости задан четырехугольник ABCD, в котором AB=BC=CD=1. Положение точек B и C фиксировано, точки же A и D подвергаются следующим преобразованиям (сохраняющим длины отрезков AB, CD и AD). Новое положение точки A получается из старого симметрией относительно прямой BD, затем новое положение точки D получается из старого симметрией относительно прямой AC (где A уже занимает новое положение), затем опять A отражается относительно BD (D уже новое), затем вновь отражается D и так далее. Докажите, что после нескольких отражений положение всех точек совпадает с первоначальным.*

Ломаная $ABCD$ определяется заданием двух углов: $\angle BCA = \beta$ и $\angle CDB = \gamma$; при этом, если обозначить через X и Y точки на продолжениях отрезка BC, то (поскольку треугольники ABC и BCD равнобедренные, см. рисунок) $\angle XBA = 2\beta$, а $\angle YCD = 2\gamma$. Углы будем считать направленными, скажем, против часовой стрелки.



При отражении точки A угол $\angle XBA = 2\beta$ заменяется на $\angle XBA' = \gamma - (2\beta - \gamma) = 2\gamma - 2\beta = 2(\gamma - \beta)$ (где A' — это новое положение точки A), а угол γ при точке C не меняется. Таким образом, пара $(\beta;\gamma)$, задающая нашу ломаную, преобразуется так:

$$(\beta;\gamma) \to (\gamma - \beta;\gamma),$$

т.е. второй угол сохраняется, а на место первого ставится разность второго и первого. Следующее преобразование будет точно таким же, только «первый» и «второй» меняются ролями. Продолжая чередовать такие операции, получим

$$(\beta;\gamma) \to (\gamma - \beta;\gamma) \to (\gamma - \beta;-\beta) \to$$
$$\to (-\gamma;-\beta) \to (-\gamma;\beta - \gamma) \to (\beta;\beta - \gamma) \to (\beta;\gamma)$$

— мы вернулись на место через 6 шагов!

Н.Васильев, М.Концевич

М1393. *В таблице m строк, n столбцов. «Горизонтальным ходом» называется такая перестановка элементов таблицы, при которой каждый элемент остается в той строке, в которой он был и до перестановки; аналогично определяется «вертикальный ход» (слово «строка» в предыдущем определении заменяется на «столбец»). Укажите такое k, что за k ходов можно получить любую перестановку mn элементов таблицы, но существует такая перестановка, которую нельзя получить за меньшее число ходов.*

Ответ: $k=3$ (при m, n больших 1).

Двух ходов недостаточно: рассмотрим таблицу

$$\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$$

и покажем, что за два хода из нее нельзя получить таблицу

$$\begin{matrix} d & b \\ c & a \end{matrix}$$

Действительно, допустим противное. За один ход d нельзя перевести в a, следовательно, d должно переместиться на первом же ходу. Точно так же на первом же ходу должно переместиться a. d может переместиться либо на место b, либо на место c. Ввиду симметрии, это все равно; допустим, что d переместилось на место c. Тогда a переместилось на место b. Получилась таблица

$$\begin{matrix} b & a \\ d & c \end{matrix}$$

Но тогда второй ход может быть только один, и получается таблица

$$\begin{matrix} d & c \\ b & a \end{matrix}$$

а не та, которую хотели получить. Утверждение доказано.

Докажем теперь, что трех ходов для любого преобразования таблицы достаточно. Первым (горизонтальным) ходом нужно добиться того, чтобы любые два элемента, которые в конце должны находиться в одной строке, оказались в разных столбцах. Если первым ходом этого удастся добиться, то вторым (вертикальным) ходом можно поставить все элементы в нужные строки, а затем третьим (горизонтальным) ходом поставить все элементы на нужные места в своих строках.

Поставим в n клетках, которые в конце концов должны оказаться в первой строке, номер 1, во второй — номер 2, ..., в m-ой — номер m. Каждый из этих номеров будет стоять ровно в n клетках.

Осталось доказать такое утверждение.

Теорема. *Пусть во всех клетках таблицы из m строк и n столбцов расставлены номера от 1 до m, причем каждый встречается n раз. Тогда можно переставить номера в строках так, что в каждом столбце встретятся все номера от 1 до m.*

Достаточно доказать такую лемму: *в условиях теоремы можно выбрать m клеток в разных строках, в которых встречаются по разу все номера.* В самом деле, если выбранные клетки переставить в первый столбец, то для оставшейся таблицы $m \times (n-1)$ будут выполнены условия теоремы, и доказательство теоремы завершается по индукции (для $n = 1$ она очевидна).

Для каждого номера x (и каждого подмножества X множества M номеров $\{1, 2, \ldots, m\}$) обозначим через $s(x)$ (соответственно, $s(X)$) набор строк, в которых встречаются эти номера; через $|Y|$ обозначим число элементов множества Y.

Если для некоторого подмножества $Y \subset M$, содержащего $p<m$ элементов, $|s(Y)| = |Y| = p$, т.е. некоторые p номеров встречаются только в p строках, то для дополнительного подмножества $Z = M \setminus Y$ также $|s(Z)| = |Z| = m - p$, — таблица «распадается» на две, $p \times n$ и $(m-p) \times n$, каждая из которых занята своими номерами. Считая по индукции, что для таблиц с количеством строк, меньшим m, лемма доказана (для $m=1$ она очевидна), мы получаем в этом случае нужное утверждение и для таблицы $m \times n$. Таким образом, далее можно считать, что для любого множества номеров $Y \subset M$ (отличного от M) множество строк, в которых встречаются номера из Y, больше $|Y|$: $s(Y) > Y$.

Пусть в нескольких строках уже выбраны различные номера; обозначим множество этих строк через T, через $f(t)$ обозначим номер, выбранный в строке, и для каждого подмножества строк $U \subset T$, соответственно, через $f(U)$ — множество всех $f(u)$, $u \in U$; положим $f(T) = X$, $|X| = k$.

Если в некоторой строке v, не входящей в T, встречается номер, не входящий в X — мы можем увеличить $k = |T| = |X|$ на 1, выбрав в строке v этот номер.

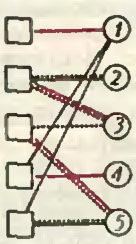
Если такой возможности сразу нет, то можно увеличить k на 1, заменив в некоторых строках из T выбранные номера «по цепочке»: *в некоторой строке $t_1 \in T$ выберем номер*, ранее не входивший в X, вместо $x_1 = f(t_1)$; в некоторой другой строке $t_2 \in T$, где встречается x_1, выберем его вместо $x_2 = f(t_2)$, и так далее, пока не встретится строка $t_r \in T$, содержащая x_{r-1}, для которой выбранный в ней номер $x_r = f(t_r)$, теперь «освободившийся», встречается в некоторой строке v, ранее не входившей в T. Существование такой цепочки (для любого номера x_0, не входящего во множество X выбранных) следует из того, что количество элементов в множествах

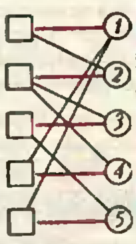
$$X_1 = f(s(x)),\ X_2 = f(s(X_1)),\ \ldots,\ X_r = f(s(X_{r-1}))$$

растет (эти множества определены, если $X_1, \ldots, X_{r-1}$ содержатся в X), значит, при некотором r множество X_r не будет содержаться в X. Тогда в X_r можно выбрать нужное x_r, затем по нему — x_{r+1} и так далее вплоть до x_0.

Проследить эту перестройку можно по рисунку, где таблице с выбранными элементами сопоставлен граф (строки изображены квадратиками, номера — кружочками, ребра графа показывают, в каких строках встречаются номера.

1	2	2
3	2	4
3	5	3
4	4	1
1	5	5





1	2	2
3	2	4
3	5	3
4	4	1
1	5	5

а выбор номера в строке показан красным цветом); перестройка соответствует изменению красного цвета на черный и обратно вдоль тропинки, изображенной серыми точками.

Заметим, что основная лемма в решении задачи — это частный случай следующей «теоремы о различных представителях» (теоремы М.Холла):

если имеется система из нескольких подмножеств конечного множества такая, что объединение любых q из них содержит не менее q различных элементов, то можно выбрать в каждом подмножестве по элементу так, что все выбранные элементы — разные.

(Эта теорема — ей эквивалентна теорема «о паросочетаниях» для двудольных графов — не раз встречалась в журнале. Она подробно разбиралась в статье М.Башмакова «Паросочетания и транспортные сети» в №4 за 1970 г.)

Н.Константинов, Н.Васильев, А.Анджанс

М1394. *Число ребер многогранника равно 100.*

а) Какое наибольшее число ребер может пересечь плоскость, не проходящая через его вершины, если многогранник выпуклый?

б) Докажите, что для невыпуклого многогранника это число может быть больше 96,

в) но не может равняться 100.

а) Ответ: максимально возможное число ребер, пересеченных плоскостью — 66.

Докажем, что для выпуклого многогранника не более чем 2/3 его ребер могут быть пересечены одной плоскостью. В каждой грани пересечено не более 2 сторон, а число сторон этой грани не меньше 3, т.е. в каждой грани пересечено не более 2/3 ее сторон. Сложив эти неравенства по всем граням (при этом каждое ребро встретится дважды), получим требуемое.

Таким образом, для выпуклого многогранника со 100 ребрами пересеченными одной плоскостью могут оказаться не более 200/3, т.е. не более 66 ребер.

Построим пример, когда эта оценка достигается (из нашего рассуждения видно, что все или «почти все» грани должны быть треугольниками, пересекаемыми плоскостью).

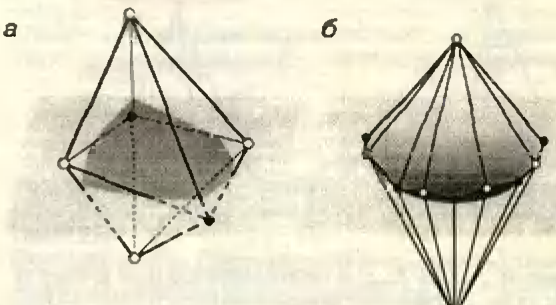


Рис. 1

Идея видна из рисунка 1,*а*: если слегка пошевелить *четыре вершины правильного октаэдра, лежащие в горизонтальной плоскости h* — поочередно слегка опустить и слегка приподнять, то из 12 ребер 8 (как раз 2/3) будут пересекать плоскость h. Точно так же шевелением «бипирамиды», у которой из двух противоположных вершин выходит по 34 ребра, получится пример многогранника с 102 ребрами, 2/3 которых пересекают плоскость h; остается превратить в четырехугольники две пары соседних треугольников так, что два ребра бипирамиды ликвидируются (рис. 1,*б*), и мы получим нужный пример.

Аналогичным образом можно показать, что $[2n/3]$ — точная оценка для выпуклого многогранника с n ребрами при любом $n \geq 6$.

б), в) Приведем пример невыпуклого многогранника со 100 ребрами, у которого все ребра, кроме двух, пересекают горизонтальную плоскость h (рис. 2).

Расположим тетраэдр $ABCD$ так, что ребро AC лежит выше, а BD — ниже h (D, как на нашем рисунке, может лежать и в самой плоскости h). Гранями нашего многогранника будут треугольники ABD, CBD и узкие невыпук-

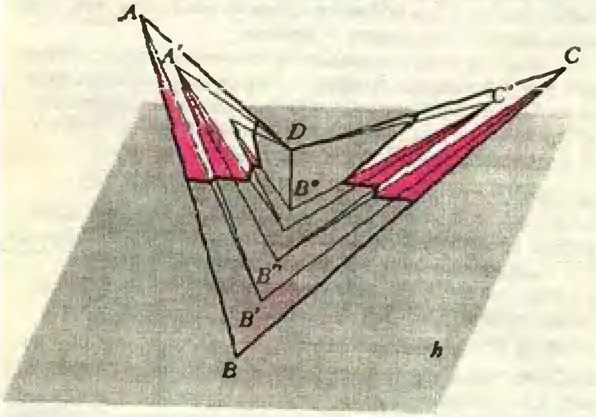


Рис. 2

лые четырехугольники $ABCB'$, $ADA'B'$, $B'A'B''C$, $CDC'B''$, $A'B''C'B'''$, $A'B'''A''D$,… получаемые следующим образом: точка B' лежит в треугольнике ABC, вблизи B; точка A' — в треугольнике $AB'D$, вблизи A; точка B'' — в треугольнике $A'B'C$ вблизи B'; точка C' — в треугольнике $B'A''D$ вблизи C; точка B''' — в треугольнике $A''B'C$

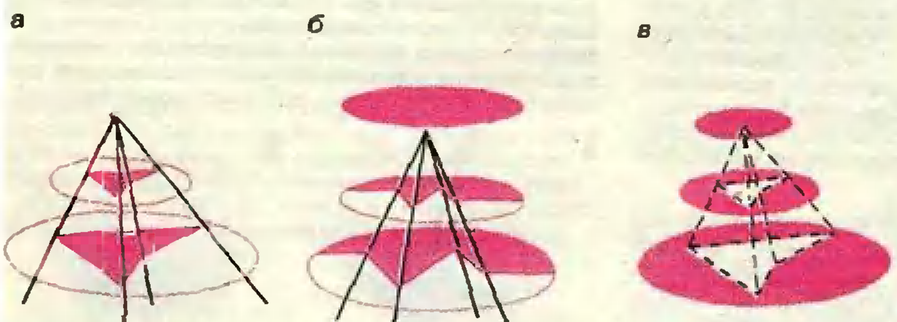


Рис. 3

вблизи B''; точка A'' — в треугольнике $A'B''D$ вблизи A', и так далее. Добавление каждого четырехугольника увеличивает число ребер на 2; поэтому после добавления 47-го четырехугольника остается добавить еще одно ребро (B^*D) и две треугольные грани (B^*A^*D и B^*C^*D) — и мы получим пленку, ограничивающую сверху многогранник со 100 ребрами, у которого все ребра, кроме двух, — BD и B^*D, — пересекают h.

Теперь докажем, что пересечь все 100 ребер многогранника плоскость h не может (конечно, речь идет о пересечении ребер в их внутренних точках). Предположим, что такой многогранник M существует. Слегка повернув его, мы можем добиться, чтобы он находился в «общем положении» по отношению к горизонтальной плоскости h (так что все вершины находятся на разных расстояниях от h). Будем двигать плоскость, параллельную h, сверху вниз и проследим, как меняются при этом сечения многогранника M, — какие «перестройки» происходят при прохождении вершин.

Если h пересекает все ребра, то вершины делятся на два типа: «верхние» — все исходящие из них ребра идут вниз, и «нижние» — все исходящие из них ребра идут вверх (верхние расположены над h, нижние — под ней). Рассмотрим выпуклую оболочку нашего многогранника M. Это выпуклый многогранник, имеющий по крайней мере четыре вершины (это — некоторые из вершин M). Можно считать, что по крайней мере две из них — A и B — верхние (и тем самым все ребра из них идут вниз). Горизонтальные сечения M чуть ниже таких вершин выглядят так, как показано на рисунке 3,*а*. Еще два типа окрестностей верхних вершин изображены на рисунках 3,*б* и 3,*в*; на рисунке *б* одна из граней имеет плоский угол, больший 180° (легко видеть, что к верхней вершине может примыкать лишь один такой угол — иначе грани выше этой вершины должны были бы пересечься); на рисунке *в* вершина находится в верхней точке «пещеры» внутри многогранника. (Аналогично устроены окрестности нижних вершин.) С другой стороны, поскольку многогранник M связен, т.е. состоит из одного куска, то многоугольники, возникшие при прохождении плоскостью вершин A и B, должны в некоторый момент «соприкоснуться» (быть может, один или оба этих многоугольника до этого «распадутся» на две части); вершины, в которых происходит такая перестройка, называются «седловыми» (рис. 4). Но ни одна из верхних и нижних вершин, как видно из рисунка 3, не может быть седловой: при прохождении таких вершин сечение или исчезает, или остается связным (в окрестности вершины состоящим из одного куска), т.е. не может распадаться. Таким образом, нужного многогранника M не существует.

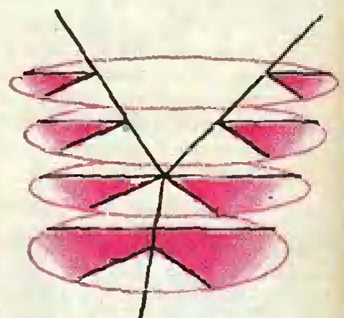


Рис. 4

Попробуйте доказать, что у многогранника существует не менее двух ребер, не пересекающих данную плоскость.

А.Анджанс, Н.Васильев

М1395. *Назовем человека малообщительным, если у него менее 10 знакомых. Назовем человека чудаком, если все его знакомые малообщительны. Докажите, что количество чудаков не больше количества малообщительных.*

Назовем малообщительных чудаков нормальными людьми. Пусть остальных малообщительных людей m человек, а остальных чудаков — k человек. Общее количество N знакомств между остальными малообщительными людьми и остальными чудаками не меньше $10k$ (каждый такой чудак знаком не меньше чем с 10 людьми, причем только с малообщительными не чудаками, так как чудаки знакомы между собой только тогда, когда они — нормальные). С другой стороны, это количество меньше $10m$ (каждый малообщительный знаком меньше, чем с десятью людьми). Отсюда следует, что $k<m$. А это и значит, что малообщительных людей больше, чем чудаков.

Ф.Назаров

М1396. *Докажите, что для любых положительных чисел a_k, b_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) выполнено неравенство*

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_kb_k}{a_k+b_k}\le\frac{AB}{A+B},$$

где $A = a_1+\ldots+a_n$, $B = b_1+\ldots+b_n$.

Первое решение. Доказательство проведем по индукции. Докажем неравенство для $n = 2$.

Положим $v = a_1+b_1$, $u = a_2+b_2$:

$$a_1b_1u^2+(a_1b_1+a_2b_2)uv+a_2b_2v^2\le uv(a_1+a_2)(b_1+b_2),$$

или

$$a_1b_1u^2-(a_2b_1+a_1b_2)uv+a_2b_2v^2\le 0.$$

Обозначим $t=u/v$. Перепишем неравенство:

$$v^2a_1b_1\left(t-\frac{b_2}{b_1}\right)\left(t-\frac{a_2}{a_1}\right)\le 0.$$

Подставляя $t=(a_2+b_2)/(a_1+b_1)$, приходим к эквивалентному неравенству:

$$(b_2a_1-b_1a_2)(a_2b_1-a_1b_2)\le 0,$$

или

$$-(b_2a_1-b_1a_2)^2\le 0.$$

Неравенство доказано.

Еще одно, геометрическое, доказательство неравенства основано на том, что биссектриса прямого угла треугольника с катетами a и b равна $\sqrt{2}ab/(a+b)$. Пусть, для определенности, $b_2/a_2\ge b_1/a_1$. Рассмотрим конфигурацию рисунка 1. Точка пересечения биссектрисы с отрезком AB лежит дальше от вершины угла O, чем точка L ($PK/KQ = BP/QA = b_1/a_1 \le PL/LQ = b_2/a_2$).

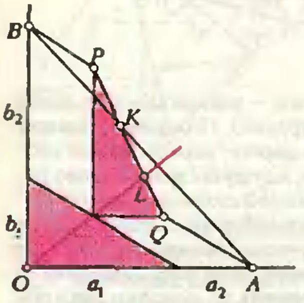


Рис. 1

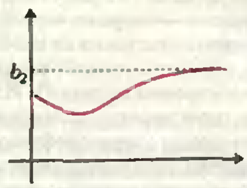


Рис. 2

Дадим еще одно доказательство этого неравенства, основанное на исследовании функции

$$f(x)=\frac{(x+a_2)(b_1+b_2)}{x+a_2+b_1+b_2}-\frac{xb_1}{x+b_1},$$

где $x\ge 0$. Нетрудно проверить, что

$$f(0)=\frac{a_2(b_1+b_2)}{a_2+b_1+b_2}>\frac{a_2b_2}{a_2+b_2};$$

функция $f(x)$ имеет единственный минимум при $x=a_2b_1/b_2$, равный $a_2b_2/(a_2+b_2)$;

$f(x)\to b_2$ при $x\to+\infty$ (рис. 2). Отсюда легко вывести, что

$f(x)\ge a_2b_2/(a_2+b_2)$ при всех $x\ge 0$.

Далее,

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{a_kb_k}{a_k+b_k}\le\frac{A'B'}{A'+B'}+\frac{a_{n+1}b_{n+1}}{a_{n+1}+b_{n+1}}\le\frac{AB}{A+B},$$

где

$$A'=\sum_{k=1}^{n}a_k,\quad B'=\sum_{k=1}^{n}b_k.$$

Неравенство задачи доказано. Мы видели, что для $n = 2$ неравенство переходит в равенство лишь при $x/b_1 = a_2/b_2$, т.е. в случае коллинеарности векторов (a_1, b_1) и (a_2, b_2). Попробуем дать задаче дальнейшую векторную интерпретацию.

Второе решение. Будем рассматривать числовые функции $f(\bar{x})$, где $\bar{x}=(x,y)$ — вектор плоскости, $x>0$, $y>0$.

Определение. *Функция $f(\bar{x})$ называется вогнутой (или выпуклой вверх), если для любых векторов $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ выполняется неравенство*

$$\frac{f(\bar{x}_1)+f(\bar{x}_2)}{2}\le f\left(\frac{\bar{x}_1+\bar{x}_2}{2}\right). \qquad (1)$$

Замечание. Геометрический смысл вогнутости ясен из рисунка 3. Вогнутыми являются, например, функции $y=ax+b$, $y=-x^2+bx+c$, $y=-1/(dx+e)$, где $dx+e>0$.

Рассмотрим функцию

$$f(\bar{x})=\frac{xy}{x+y}.$$

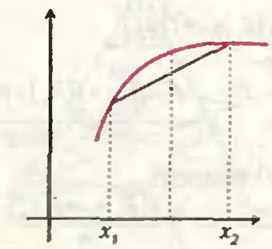


Рис. 3

При $n = 2$ утверждение задачи означает, что функция вогнута; при произвольном n — что выполнено неравенство

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\bar{x}_i)\le f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\bar{x}_i\right). \qquad (2)$$

Теорема. *Для любой вогнутой (т.е. удовлетворяющей неравенству (1)) функции выполнено также и неравенство (2).*

Доказательство. Предполагая справедливость теоремы при $n = m$, докажем ее справедливость при $n = 2m$. Имеем:

$$f\left(\frac{\bar{x}_1+\bar{x}_2+\ldots+\bar{x}_{2m}}{2m}\right)=$$

$$=f\left(\frac{\frac{\bar{x}_1+\bar{x}_2}{2}+\ldots+\frac{\bar{x}_{2m-1}+\bar{x}_{2m}}{2}}{m}\right)\ge$$

$$\ge\frac{f\left(\frac{\bar{x}_1+\bar{x}_2}{2}\right)+\ldots+f\left(\frac{\bar{x}_{2m-1}+\bar{x}_{2m}}{2}\right)}{m}\ge$$

$$\ge\frac{\frac{f(\bar{x}_1)+f(\bar{x}_2)}{2}+\ldots+\frac{f(\bar{x}_{2m-1})+f(\bar{x}_{2m})}{2}}{m}=$$

$$=\frac{f(\bar{x}_1)+\ldots+f(\bar{x}_{2m})}{2m}.$$

Таким образом, теорема справедлива при $n=2^m$. Положим теперь $n+p=2^m$. Тогда

$$f\left(\frac{\bar{x}_1+\ldots+\bar{x}_n+\bar{y}_1+\ldots+\bar{y}_p}{n+p}\right)\geq$$
$$\geq\frac{f(\bar{x}_1)+\ldots+f(\bar{x}_n)+f(\bar{y}_1)+\ldots+f(\bar{y}_p)}{n+p}. \qquad (3)$$

Положим

$$\bar{y}_1=\ldots=\bar{y}_p=\frac{\bar{x}_1+\ldots+\bar{x}_n}{n},$$

тогда

$$\bar{y}_1+\ldots+\bar{y}_p=\frac{\bar{x}_1+\ldots+\bar{x}_n}{n}\cdot p.$$

Следовательно,

$$f\left(\frac{\bar{x}_1+\ldots+\bar{x}_n+\bar{y}_1+\ldots+\bar{y}_p}{n+p}\right)=f\left(\frac{\bar{x}_1+\ldots+\bar{x}_n}{n}\right).$$

С другой стороны,

$$\frac{f(\bar{x}_1)+\ldots+f(\bar{x}_n)+f(\bar{y}_1)+\ldots+f(\bar{y}_p)}{n+p}=$$
$$=\frac{f(\bar{x}_1)+\ldots+f(\bar{x}_n)+pf\left(\frac{\bar{x}_1+\ldots+\bar{x}_n}{n}\right)}{n+p}$$

Из неравенства (3) получаем:

$$f\left(\frac{\bar{x}_1+\ldots+\bar{x}_n}{n}\right)\geq\frac{f(\bar{x}_1)+\ldots+f(\bar{x}_n)}{n}.$$

Теорема доказана.

Перепишем теперь утверждение задачи при $n=2$: функция

$$f(\bar{x})=\frac{xy}{x+y},$$

рассматриваемая на любой прямой l, является вогнутой.

Докажем это утверждение.

Если $l \parallel Oy$, то вогнутость функции $f(\bar{x})$ очевидна.

Пусть l задана уравнением $y=ax+b$. Тогда

$$f(\bar{x})=\frac{ax^2+bx}{(a+1)x+b}.$$

При $a=-1$ будет $b>0$, и $f(x)$ вогнута. Полагая $t=(a+1)x+b$ при $a\neq-1$, получаем:

$$f(\bar{x})=ct+d+\frac{e}{t},$$

где $e=\dfrac{-b^2}{(a+1)^2}$.

При $b=0$ функция $f(\bar{x})$ линейная, при $b\neq0$, поскольку $t>0$, — строго вогнутая (т.е. при $\bar{x}_1\neq\bar{x}_2$ неравенство (1) строгое).

Утверждение задачи доказано.

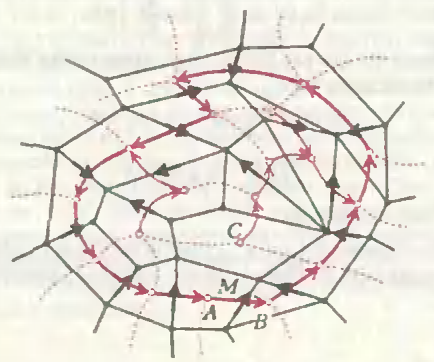
А.Егоров, В.Сендеров

М1397. *По контуру каждой грани выпуклого многогранника ползает муравей (таким образом, муравьев столько же, сколько граней), и все они движутся, обходя свою грань по часовой стрелке. Известно, что их скорости в любой момент времени не меньше 1 мм/ч. Докажите, что рано или поздно какие-то два муравья столкнутся.*

«Позицией» в этой задаче естественно считать указание для каждой грани, на какой ее стороне находится соответствующий муравей, а «ходом» — переползание одного из муравьев на соседнюю сторону. Докажем, что если столкновения не происходит, два муравья из соседних граней не могут оказаться на одном ребре. Это очевидно, если они ползут навстречу друг другу. А поскольку число позиций конечно, то неизбежно начнется повторение позиций, и дальше движение без столкновений можно считать периодическим; при этом не может возникнуть и такая ситуация, когда муравьи ползут по ребру, удаляясь друг от друга (до этого они должны были столкнуться).

То, что при отображении конечного множества в себя без «неподвижных» точек непременно возникает цикл, мы используем еще раз ниже.

Нарисуем на поверхности многогранника «двойственную» карту: в каждой грани выберем некоторую точку — «столицу», и столицы двух соседних (по ребру) граней соединим дорогой (на рисунке дороги — тонкие красные линии; муравьи — жирные черные стрелки).



Позицию будем изображать, поставив на каждой дороге, пересекающей ребро, где есть муравей, стрелку, идущую слева направо (с точки зрения муравья). Из каждой столицы выходит ровно одна дорога, поэтому в каждой данной позиции имеется «цикл» — круговой маршрут по отмеченным стрелками дорогам. Этот цикл делит поверхность многогранника на две области; назовем «внутренней» ту, которую цикл обходит против часовой стрелки (все «граничные» муравьи ползут внутрь цикла). Выберем такой цикл, внутри которого нет других. (В результате ходов внутри этого цикла может возникнуть меньший, тогда мы будем рассматривать его.) Когда ход делает муравей на цикле (а это непременно произойдет), то цикл сужается: например, ходу муравья M соответствует замена стрелки AB на AC, а из точки C (как из любой столицы) ведет путь по стрелкам, который выходит где-то в точку нашего цикла. Таким образом, будут возникать циклы, ограничивающие все меньшие и меньшие области. А цикл из двух ребер (туда-обратно), как мы уже выяснили, приводит к противоречию.

А.Клячко

М1398. *На множестве M натуральных чисел от 1 до 1993 определена операция $*$, которая каждым двум числам a и b из множества M ставит в соответствие некоторое число $a*b$, также принадлежащее M. Известно, что для любых чисел a и b из M выполнено равенство $(a*b)*a=b$. Докажите, что найдется число a такое, что $a*a=a$.*

Предположим, что $a*a$ не равно a ни при каком a. Рассмотрим всевозможные упорядоченные пары (a,b), составленные из элементов множества M. Для каждой такой пары определено число $c=a*b$. Будем говорить, что пара

(a,b) входит в тройку (a,b), (c,a), (b,c). Заметим, что тогда пары (c,a) и (b,c) входят в ту же тройку, поскольку $c*a=(a*b)*a=b$, $b*c=(c*a)*c=a$.
Сказанное относится и к парам (a,a), поскольку такая пара входит в тройку (a,a), (a,c), (c,a), где $c=a*a$.
Таким образом, все множество пар разбивается на непересекающиеся тройки. Однако число 1993^2 — общее число таких пар — не делится на 3. Противоречие.
Попробуйте привести примеры операций с таким свойством на множестве из n элементов (если n не делится на 3, то непременно должны быть «нейтральные» элементы a, для которых $a*a=a$) и выяснить, бывают ли такие операции с единственным нейтральным элементом.
Ф.Назаров

Решение задачи М1399 будет опубликовано позже.

М1400. *Внутри правильного тетраэдра с ребром a летает муха. Какой наименьший замкнутый путь должна пролететь муха, чтобы побывать на всех гранях тетраэдра?*

Ответ: $\frac{2a}{5}\sqrt{10}$.

Мы должны найти простанственный четырехугольник наименьшего периметра с вершинами, принадлежащими четырем граням правильного тетраэдра. Предположим, что

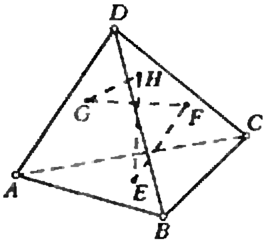


Рис. 1

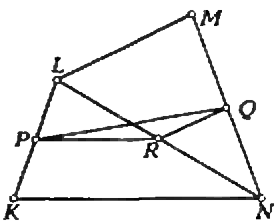


Рис. 2

E, F, G, H — точки, принадлежащие граням ABC, BCD, DAB и ACD соответственно (рис.1). Проведем плоскость DCT, перпендикулярную ребру AB (одна из плоскостей симметрии тетраэдра $ABCD$) и рассмотрим четырехугольник $E_1F_1G_1H_1$, симметричный четырехугольнику $EFGH$ относительно плоскости DCT. Точки E_1 и G_1 лежат на тех же гранях тетраэдра, а H_1 и F_1 — соответственно на гранях BDC и ADC. Пусть E_2, F_2, G_2 и H_2 — середины отрезков EE_1, FH_1, GG_1 и HF_1. Докажем, что периметр четырехугольника $E_2F_2G_2H_2$ не больше периметра $EFGH$.
Для этого нам потребуется следующая
Лемма. *Пусть $KLMN$ — пространственный четырехугольник, а P и Q — середины KL и MN. Тогда*

$$PQ \le \frac{1}{2}(KN + LM).$$

Доказательство. Пусть R — середина диагонали LN (рис.2). Тогда

$$PR = \frac{1}{2}KN,\ RQ = \frac{1}{2}LM,$$

но это и нужно было доказать.
Из леммы сразу следует, что периметр $E_2F_2G_2H_2$ не больше периметра $EFGH$. Кроме того, вершины E_2 и G_2 (середины EE_1 и GG_1) будут лежать в плоскости симметрии тетраэдра, проходящей через CD, т.е. на медианах граней ABC и ABD, проведенных к AB.
Обозначим середину ребра AB через T. Исходя из $E_2F_2G_2H_2$, точно так же построим сначала четырехугольник $E_3F_3G_3H_3$, симметричный ему относительно плоскости симметрии тетраэдра, проходящей через AB, а затем взяв середины отрезков, соединяющих вершины этих четырехугольников, лежащих в одной грани, получим четырехугольники $E_4F_4G_4H_4$, все вершины которого лежат в объединении двух плоскостей симметрии тетраэдра $ABCD$, проходящих через CD и AB. Иными словами, вершины E_4 и G_4 лежат на медианах граней ABC и ABD, проведенных к AB, а вершины F_4 и H_4 — на медианах граней CDB и CDA, проведенных к CD. Обозначим эти медианы AS и BS. При этом периметр $E_4F_4G_4H_4$ не превосходит периметра $EFGH$. Значит, периметр $EFGH$ не превосходит $4d$, где d — расстояние между CT и BS.
Возьмем теперь четырехугольник $E_0F_0G_0H_0$ таким, что его стороны E_0F_0, F_0G_0, G_0H_0 и H_0E_0 являются *общими перпендикулярами* соответственно к CT и BS, BS и DT, DT и AS, AS и CT (рис. 3); мы получим четырехугольник с периметром $4d$ (из соображений симметрии ломаная замкнется).
Итак, мы доказали, что наименьший периметр четырехугольника $EFGH$ равен $4d$, где d — расстояние между CT и BS. Найдем d.

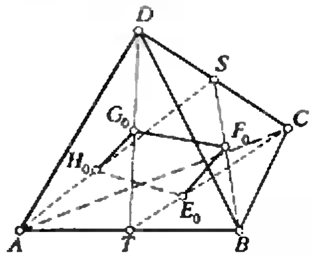


Рис. 3

Проведем через AB плоскость, перпендикулярную CT, и спроектируем на нее наш тетраэдр (рис. 4,а,б). Получим треугольник ABD', в котором $AB = 1$, $D'T = a\sqrt{2/3}$. Точка S перейдет в S' — середину $D'T$. Искомое расстояние d равно расстоянию от точки T ($=C'$) до прямой BS' (сам общий перпендикуляр параллелен плоскости проекции и по теореме о трех перпендикулярах перпендикулярен BS' — проекции BS на эту плоскость).

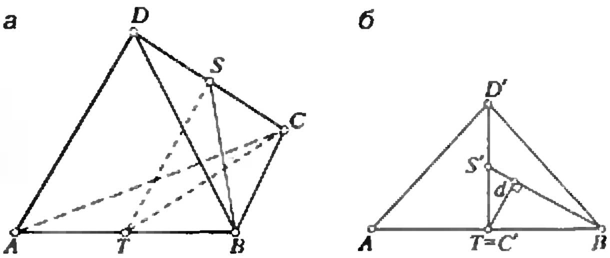


Рис. 4

В прямоугольном треугольнике BTS' известны катеты $BT = a/2$, $TS' = \frac{a}{2}\sqrt{2/3}$. Значит, $BS' = \frac{a}{2}\sqrt{5/3}$;

$$d = \frac{BT \cdot TS'}{BS'} = \frac{a}{\sqrt{10}}.$$

Замечание. Известна аналогичная задача для плоскости: жук ползает внутри треугольника со сторонами a, b, c. Какое наименьшее расстояние он может проползти, чтобы побывать на каждой стороне и вернуться в исходную точку?

Оказывается, кратчайший путь в случае остроугольного треугольника соединяет основания высот треугольника, а в случае прямо- или тупоугольного вырождается в двойной отрезок высоты.

И.Шарыгин

Ф1408. *На прямолинейном горизонтальном участке железной дороги стояла платформа с грузом. Ночью к ней подкрался похититель, захвативший с собой легкий и упругий резиновый шнур. Привязав один конец шнура к платформе, а второй к своему поясу, он бросился бежать с постоянной скоростью 5 м/с вдоль железнодорожного полотна. Удар... Через некоторое время похититель очнулся, лежа на платформе, которая двигалась со скоростью 9 м/с. Во сколько раз масса платформы превышала массу похитителя? Что же там все-таки произошло? Считайте, что ботинки злодея не проскальзывали, а трение качения было пренебрежимо малым.*

Удобно перейти в систему отсчета, которая движется со скоростью $v_0 = 5$ м/с вправо вместе с похитителем. В ней движение платформы аналогично движению груза в системе «груз — пружина», когда один конец пружины (тот, где похититель) неподвижен. После того как резиновый шнур растянулся до максимума, он начал сокращаться, и к тому моменту, когда его натяжение стало равным нулю, платформа приобрела скорость v_0, направленную вправо. В неподвижной системе это означает, что платформа начала двигаться со скоростью $2v_0$ вправо (а шнур теперь уже не влияет ни на что). Когда платформа догонит злодея, произойдет то, что в механике называют абсолютно неупругим ударом (скорости тел после такого удара совпадают). Из закона сохранения импульса мы и найдем соотношение масс:

$$M \cdot 2v_0 + m \cdot v_0 = (M+m) \cdot 1{,}8v_0,$$

откуда

$$M = 4m.$$

А.Варгин

Ф1409. *Две большие горизонтальные пластины расположены одна над другой на расстоянии d. Каждая пластина поддерживается при определенной температуре (температура нижней пластины выше). Оцените разность температур пластин, при которой в системе возникнет конвекция. Воздух считайте идеальным газом, теплообменом между соседними порциями воздуха при конвекции можно пренебречь.*

Конвекция в системе возникает в результате самопроизвольного поднятия теплого воздуха из нижних слоев и опускания холодного воздуха из верхних слоев. Найдем условия возникновения такого процесса.

Рассмотрим два близко расположенных горизонтальных слоя воздуха. Часть более холодного воздуха, самопроизвольно опустившегося из верхнего слоя в нижний, будет опускаться дальше, если его плотность окажется больше, чем плотность окружающего воздуха. В процессе опускания воздуха сила тяжести совершает над ним положительную работу, поэтому внутренняя энергия и температура воздуха увеличиваются, а его плотность уменьшается.

Учитывая, что плотность ρ и температура T идеального газа связаны соотношением $\rho = pM/(RT)$, а давление газа p в системе постоянно (мы пренебрегаем изменением давления с высотой), найдем, что конвекция начнется, если изменение температуры воздуха при его опускании из верхнего слоя в нижний окажется меньше, чем разность температур между этими слоями.

Рассчитаем изменение температуры ΔT воздуха массой Δm при его адиабатическом (без теплообмена с окружающей средой) опускании на небольшую высоту h. Сила тяжести совершает над опускающимся воздухом работу

$$A_1 = \Delta mgh.$$

Эта работа расходуется на увеличение внутренней энергии газа

$$\Delta U = \frac{\Delta m}{M} C_V \Delta T,$$

где C_V — молярная теплоемкость газа при постоянном объеме, и на совершение газом работы против внешнего давления

$$A_2 = p\Delta V = \frac{\Delta m}{M} R\Delta T.$$

Таким образом,

$$A_1 = \Delta U + A_2,$$

или

$$\Delta mgh = \frac{\Delta m}{M}(C_V + R)\Delta T.$$

Откуда

$$\Delta T = \frac{Mgh}{C_p},$$

где $C_p = C_V + R$ — молярная теплоемкость газа при постоянном давлении.

В нашем случае конвекция возникнет при разности температур пластин

$$T_1 - T_2 > \frac{Mgd}{C_p}.$$

Заметим, что если провести аналогичное рассмотрение для воздуха, поднимающегося вверх, то мы получим тот же самый ответ. Это вполне естественно, поскольку конвекция представляет собой процесс поднятия воздуха в одних областях и опускания в соседних.

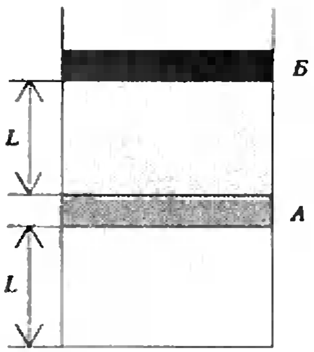
Для численной оценки величины $T_1 - T_2$ будем считать, что пластины расположены на расстоянии $d = 1$ м, что воздух — идеальный двухатомный газ с молярной массой $M = 0{,}029$ кг/моль и теплоемкостью $C_p = 7/2R$. Тогда получим

$$T_1 - T_2 \approx 0{,}01 \text{ К}.$$

В заключение необходимо заметить, что общая задача о возникновении конвекции в поле тяжести решена в книге Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшица «Гидродинамика» (М.:Наука, 1986), где в качестве примера рассмотрен также случай идеального газа (см. с. 24).

С.Кленов

Ф1410. *В стоящем на столе теплоизолированном цилиндрическом сосуде с помощью легкого теплопроводящего*



поршня А и тяжелого теплонепроницаемого поршня Б образовано два отделения длиной по $L = 0{,}4$ м, в каждом из которых находится по одному молю идеального одноатомного газа (см. рисунок). Первоначально система находится в тепловом равновесии. Газ медленно нагревают, сообщив ему количество теплоты $Q = 200$ Дж. При какой величине силы трения между поршнем А и стенками цилиндра этот поршень останется неподвижным? Поршень Б может двигаться без трения.

Обозначим конечную температуру T_1 (она устанавливается во всем сосуде, так как поршень A проводит тепло). Объем нижней части по условию не изменился, значит, давление в ней стало

$$p_1 = p_0 T_1 / T_0 .$$

В верхней части сосуда давление осталось прежним, следовательно, объем возрос на

$$\Delta V = V_1 - V_0 = V_0 \left(T_1 / T_0 - 1 \right).$$

Подведенное тепло пошло на увеличение внутренней энергии всего газа и на совершение работы по расширению газа в верхнем отделении:

$$Q = 2 \cdot \frac{3}{2} R \left(T_1 - T_0 \right) + p_0 V_0 \left(\frac{T_1}{T_0} - 1 \right).$$

Необходимая величина силы трения определяется разностью давлений на поршень A снизу и сверху:

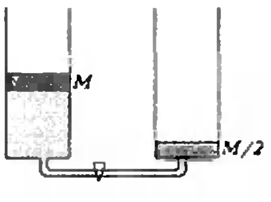
$$F = \left(p_1 - p_0 \right) S = \frac{p_0 V_0 \left(T_1 - T_0 \right)}{T_0 L} .$$

Входящую в это выражение разность температур легко выразить из уравнения для энергии. Тогда, учитывая связь давления, объема и температуры для начального состояния газа $p_0 V_0 = RT_0$, получим

$$F = \frac{Q}{4L} = 125 \text{ Н}.$$

Л. Блинов

Ф1411. *Два одинаковых цилиндрических сосуда соединены друг с другом короткой и тонкой трубкой, перекрытой краном (см. рисунок). В левом сосуде под поршнем массой M находится некоторое количество одноатомного идеального газа при температуре T_0. В правом сосуде газа нет, и поршень массой $M/2$ лежит на дне. Откроем кран. Какой будет температура газа в состоянии равновесия? Масса газа равна $M/10$. Теплоемкостью поршней и сосуда можно пренебречь. Трение пренебрежимо мало. Воздух снаружи отсутствует. Вся система теплоизолирована.*



После того как левый поршень опустится, а правый поднимется, в системе установится термодинамическое равновесие. Запишем закон сохранения энергии, учитывая теплоизолированность системы:

$$\nu C_V \left(T - T_0 \right) = MgH_0 - \frac{M}{2} gH + \frac{M}{10} g \frac{H_0 - H}{2} ,$$

где ν — число молей газа, $C_V = 3/2R$ — молярная теплоемкость одноатомного газа при постоянном объеме. Заметим, что в задаче обязательно надо учитывать изменение положения центра масс газа, поскольку масса газа близка к массе поршней. Однако учитывать распределение плотности газа по высоте не имеет смысла, так как этот эффект крайне слабо влияет на конечный результат. Из уравнения состояния газа до открытия крана следует равенство

$$p_0 V_0 = \frac{Mg}{S} H_0 S = MgH_0 = \nu RT_0 .$$

Аналогично после установления равновесия —

$$\frac{M}{2} gH = \nu RT .$$

Выразим отсюда H_0 и H и подставим в исходное уравнение для энергии:

$$\nu C_V \left(T - T_0 \right) = -\nu R \left(T - T_0 \right) + \frac{\nu R \left(T_0 - 2T \right)}{20} .$$

Имея в виду, что теплоемкость газа при постоянном давлении

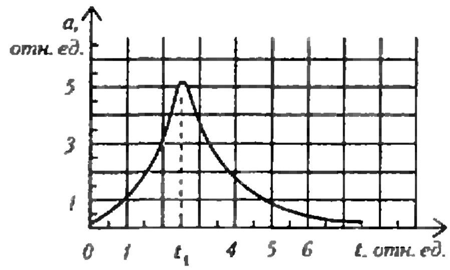
$$C_p = C_V + R = 5R/2,$$

получим окончательно

$$T = \frac{51}{52} T_0 = 0{,}98\, T_0 .$$

В. Овчинкин

Ф1412. *Заряженная капля уравновешена в воздухе электрическим полем. Начиная с момента $t_0 = 0$ поле начинает уменьшаться и к моменту t_1 обращается в ноль. На рисунке приведен график зависимости ускорения падающей капли от времени (в относительных единицах). Используя этот график, найдите максимальное ускорение капли. Силу сопротивления воздуха считайте пропорциональной скорости капли.*



Прежде всего нужно аккуратно поработать с графиком ускорения — с его помощью построить график зависимости скорости от времени (конечно, он тоже получится в относительных единицах). Для такого построения вспомним, что приращение скорости за некоторый интервал времени равно площади под графиком ускорения на этом интервале. График скорости нужен для того, чтобы определить, во сколько раз скорость v в момент выключения поля t_1 меньше предельной установившейся скорости движения v_y. У меня получилось

$$v = 0{,}45 v_y .$$

При установившемся движении сила сопротивления воздуха F_c, пропорциональная скорости движения капли, компенсирует силу тяжести mg. Тогда ускорение капли в момент t_1 (т.е. максимальное ускорение) равно

$$a = \frac{mg - F_c}{m} = g\left(1 - \frac{F_c}{mg}\right) = g\left(1 - \frac{v}{v_y}\right) = 5{,}5 м/с^2.$$

А.Шеронов

Ф1413. *Электрический утюг без терморегулятора рассчитан на напряжение 220 В. При включении в сеть 127 В он нагрелся только до температуры +127 °С, для глажения же нужна температура от +200 °С до +300 °С. Можно ли гладить утюгом при напряжении сети 220 В? Теплоотдачу считайте пропорциональной разности температур. Сопротивление нагревательного элемента утюга неизменно. Температура в комнате +20 °С.*

При напряжении сети 220 В мощность получится больше, чем при 127 В:

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{220}{127}\right)^2 = 3.$$

Во столько же раз возрастет «перегрев» утюга относительно окружающей среды:

$$\frac{t - 20}{127 - 20} = 3,$$

откуда для температуры утюга получим

$$t = 341\ ^\circ\text{C}.$$

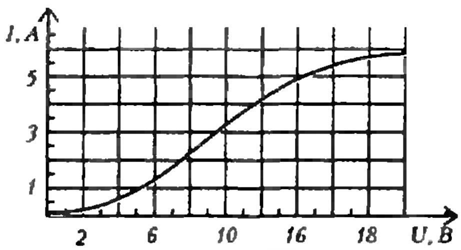
Это больше, чем нужно. Однако каждый из пользователей вполне может делать то же, что и терморегулятор утюга — периодически включать и выключать его. Так, для получения температуры +250 °С (каждый вид ткани «любит» свою температуру) мощность должна быть равной

$$P = P_1 \frac{230}{321} = \frac{3}{4} P_1.$$

Этого можно достигнуть, например, выключая каждую минуту утюг на четверть минуты (или делать это пореже — тепловая инерция утюга это позволяет).

М.Гаврилов

Ф1414. *Зависимость величины тока от приложенного напряжения для лампы неизвестной конструкции приведена на рисунке. Эту лампу подключают к источнику последовательно с резистором, сопротивление которого 10 Ом. При каком напряжении источника мощность, потребляемая лампой, составит 1/4 от мощности, которую развивает источник?*



Задачу придется решать графически. По условию мощность источника в 4 раза больше мощности лампы, значит, напряжение на резисторе составляет 3/4 напряжения батареи, а напряжение лампы — 1/4, т.е. ровно в 3 раза меньше и при том же токе. Если нарисовать на нашем графике зависимость между током и напряжением для резистора, сопротивление которого в 3 раза меньше, чем 10 Ом, то получим прямую, которая пересекает график для лампы при токах 2,5 А и 6 А. Конечно, эти цифры примерные, их точность определяется малыми размерами графика — у вас могут получиться и несколько другие значения.

Теперь легко найти ответ, вернее, ответы — их два. Условие задачи можно выполнить, подобрав напряжение источника таким, чтобы ток составил либо 2,5 А:

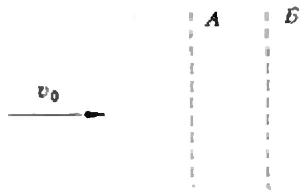
$$U_1 = 2{,}5\ \text{А} \cdot 10\ \text{Ом} + 2{,}5\ \text{А} \cdot \frac{10}{3}\ \text{Ом} = 33{,}5\ \text{В},$$

либо 6 А:

$$U_2 = 6\ \text{А} \cdot 10\ \text{Ом} + 6\ \text{А} \cdot \frac{10}{3}\ \text{Ом} = 80\ \text{В}.$$

Б.Гринченко

Ф1415. *Тонкий пучок электронов, движущийся со скоростью v_0, пролетает сквозь сетки А и Б (см. рисунок), подключенные к выводам генератора переменного напряжения, изменяющегося по закону $U = U_0 \sin \omega t$. Время пролета между сетками во много раз меньше периода колебаний напряжения. Оцените расстояние, на котором электроны соберутся в сгустки. Изменение скорости от воздействия переменного электрического поля считайте малым по сравнению с v_0.*



Рассмотрим электрон, который подлетает к сетке в момент нулевого ускоряющего напряжения, и его соседей. Сам этот электрон своей скорости изменить не может, а если прилетевших немного раньше чуть притормозить, а запоздавших дополнительно разогнать — в этом случае они все могут через некоторое время собраться в одном месте, образовав необходимый нам сгусток. (Обратите внимание — за период переменное напряжение обращается в ноль два раза, а нам подходит только один из них.) Добавку к скорости соседей найти легко:

$$m\Delta v = F\Delta t = \frac{qEd}{v_0} = \frac{qU}{v_0},$$

и

$$\Delta v = \frac{qU}{mv_0}.$$

Искомое время T движения электронов найдем из условия

$$v_0 T = (v_0 + \Delta v)(T - \Delta t),$$

откуда

$$T = \frac{v_0 \Delta t}{\Delta v} = \frac{mv_0^2 \Delta t}{qU_0 \sin \omega \Delta t}.$$

При малых Δt можно избавиться от синуса (время мы отсчитывает от нуля синуса!): $\sin \omega \Delta t = \omega \Delta t$. Тогда время

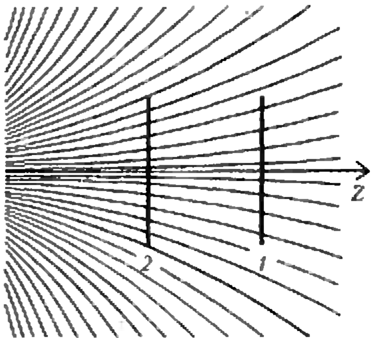
$$T = \frac{mv_0^2}{q\omega U_0},$$

а расстояние

$$L = v_0 T = \frac{m v_0^3}{q\omega U_0}.$$

М.Сметанин

Ф1416. *На рисунке изображены линии магнитной индукции поля вблизи торца круглой катушки с железным сердечником. Ось Z является осью симметрии магнитного поля. Вдали от катушки находится кольцо из сверхпроводника. Ток в кольце отсутствует. Затем кольцо вносят в магнитное поле — сначала в положение 1, затем в положение 2. Определите отношение токов в кольце в этих двух случаях. Определите также отношение сил, действующих на кольцо в положениях 1 и 2.*



При внесении сверхпроводящего витка в магнитное поле полный магнитный поток, пронизывающий этот виток, не должен измениться — т.е. он должен в нашем случае остаться нулевым. Это значит, что «свой» ток в обоих положениях кольца должен скомпенсировать магнитный поток внешнего поля. Поскольку магнитный поток Φ пропорционален току I, можно записать равенство

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\Phi_{\text{внеш}1}}{\Phi_{\text{внеш}2}}.$$

Магнитный поток определяется числом линий магнитной индукции, охватываемых контуром. Однако нам придется учесть, что на картинке нарисованы не совсем те линии, которые нужно пересчитывать, — ведь кольцо расположено в плоскости, перпендикулярной рисунку, значит, для нахождения отношения полей нужно возвести в квадрат отношение числа линий N_1 / N_2, т.е.

$$\frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \approx \left(\frac{8}{11}\right)^2 \approx \frac{1}{2}.$$

Для нахождения отношения сил F_1 / F_2 нужно учесть, что нас интересует составляющая магнитной индукции, перпендикулярная оси Z:

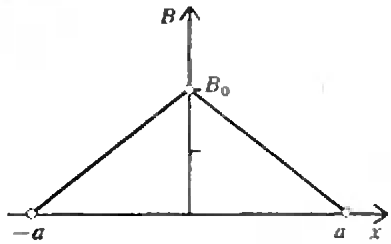
$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{I_1 B_{1\perp}}{I_2 B_{2\perp}} \approx \frac{I_1}{I_2}\frac{N_1}{N_2}\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \approx \frac{1}{5},$$

где α — угол наклона линии магнитной индукции к оси Z. Если бы рисунок линий магнитной индукции был побольше, можно было бы по нему определить точнее отношение полей в области, непосредственно примыкающей к кольцу в первом и втором положениях. Нам же пришлось ограничиться довольно грубыми оценками «средних» полей.

С.Козел

Ф1417. *Кольцо диаметром $d = 6$ мм, сделанное из очень тонкой проволоки с удельным сопротивлением $\rho = 2 \cdot 10^{-8}$ Ом·м и плотностью $D = 9 \cdot 10^3$ кг/м^3, пролетает по прямой между полюсами магнита, не успев при этом повернуться. Оцените изменение скорости кольца, если его скорость перед пролетом была $v_0 = 20$ м/с. Магнитное поле направлено перпендикулярно плоскости кольца, вектор скорости кольца параллелен плоскости кольца. Зависимость магнитной индукции поля от координаты x (вдоль которой движется кольцо) приведена на рисунке, где $B_0 = 1$ Тл, $a = 10$ см.*

На кольцо со стороны магнитного поля действует тормозящая сила. Рассчитать ее «в лоб» не так просто, зато изменение скорости можно найти довольно легко из энергетических соображений. Во время пролета между полюсами магнита в кольце выделяется некоторое количество теплоты, как раз равное изменению кинетической энергии кольца — энергия взаимодействия тока кольца с магнитным полем до того, как кольцо влетает в магнитное поле, и после того, как оно покидает поле, равна нулю.



Расчет сильно упростится, если изменение скорости будет небольшим. Сделаем такое предположение, а в конце посмотрим — справедливо ли оно. И еще: размеры кольца малы по сравнению с размерами области поля, поэтому тем, что происходит при входе кольца в поле и выходе из него, мы интересоваться не будем.

Итак, ток, возникающий в кольце, равен

$$I = \frac{\Delta\Phi / \Delta t}{R} = \frac{B_0 S v_0 / a}{R} = \text{const}.$$

Время пролета составляет

$$t = \frac{2a}{v_0}.$$

Тогда выделившееся количество теплоты будет равно

$$Q = I^2 R t = \frac{2 B_0^2 S^2 v_0}{aR}.$$

Изменение скорости выразим из соотношения

$$\frac{m v_0^2}{2} - \frac{m(v_0 - \Delta v)^2}{2} \approx m v_0 \Delta v = Q,$$

откуда

$$\Delta v = \frac{2 B_0^2 S^2}{maR} = \frac{B_0^2 d^2}{8 D\rho a} = 0{,}25 \text{ м/с} \ll v_0.$$

В.Афанасьев

Поправка

В «Кванте» № 9/10 за 1993 год в статье «Задачи Московской математической олимпиады 1993 года» в задаче 4 для 11 класса вместо авторов С.Гусейн-Заде, А.Белов должны быть указаны С.Гусейн-Заде, И.Ященко. Приносим наши извинения.

Калейдоскоп - лабиринт

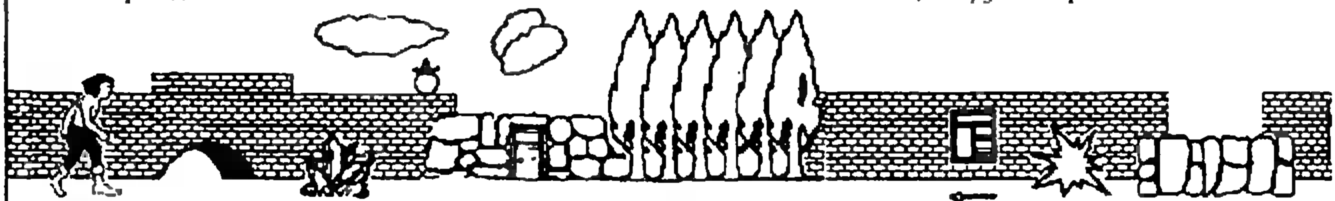
Вы, наверное, уже встречались с тестовой формой постановки задач, когда решающему предлагают на выбор несколько ответов и он должен выбрать правильный. Такая форма облегчает проверку работы экзаменующегося, ее можно поручить даже компьютеру, а сам тестируемый получает некую подсказку: правильный ответ находится среди указанных. Не огорчайтесь, если ваш путь по предлагаемому калейдоскопу-лабиринту окажется не самым коротким: на ошибках, как известно, учатся. Кстати, те, кто умеет обращаться с компьютером, могут из этого калейдоскопа сделать обучающую программу.

1. Попробуйте пересечь треугольную пирамиду плоскостью, равноотстоящей от всех его вершин. Нашли такую плоскость? А сколько всего существует таких плоскостей?
Три: переходите к 6.
Четыре: переходите к 16.
Семь: переходите к 11.

2. Вы близки к истине. Если вместо числа 30 взять, например, число 34, то в этом случае число a действительно будет единственным, а именно, $a = 290$. Возвращайтесь к 13.

3. К сожалению, вы не правы. Центры тяжести треугольника и его периметра, как правило, не совпадают. Возвращайтесь к 17.

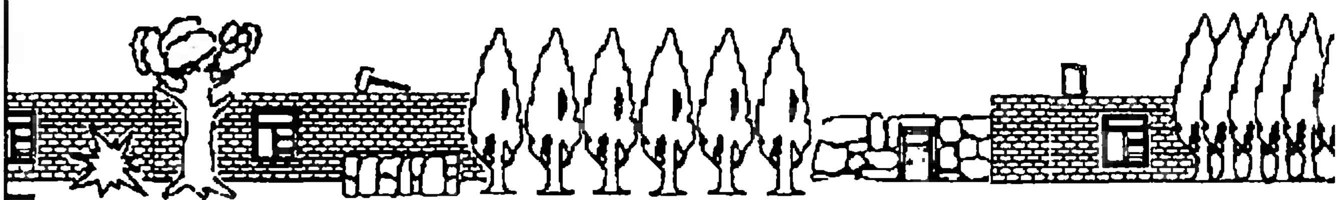
4. Число 1 является
простым: переходите к 21,
составным: переходите к 23,
ни тем, ни другим: переходите к 14.



5. Какое из чисел 2^{121}, 9^{33}, 7^{44} самое большое?
2^{121}: переходите к 9,
9^{33}: переходите к 19,
7^{44}: переходите к 24.

6. Вы нашли самые сложные способы расположения плоскостей. Поищите более простые. Возвращайтесь к 1.

7. Вы правы! Эта точка не является ни точкой пересечения биссектрис, ни точкой пересечения медиан данного треугольника. Она является точкой пересечения биссектрис треугольника с вершинами в серединах сторон данного. Переходите к 13.



8. Уравнение $x^2 = 2^x$ имеет
одно решение: переходите к 12,
два решения: переходите к 15,
три решения: переходите к 18.

9. Это число не самое маленькое из трех, но и не самое большое. Возвращайтесь к 5.

10. Верно! Это числа 34 и 226. Действительно, если $a + 30 = n^2$ и $a - 30 = m^2$, то $60 = (n - m)(n + m)$, причем оба сомножителя справа должны быть одинаковой четности. Это выполняется лишь в случаях $n+m = 30$, $n - m = 2$ и $n+m = 10$, $n - m = 6$, откуда получаем два решения: $n = 16$, $m = 14$ и $n = 8$, $m = 2$, им соответствуют значения для a: $a = 226$ и $a = 34$. Переходите к 5.

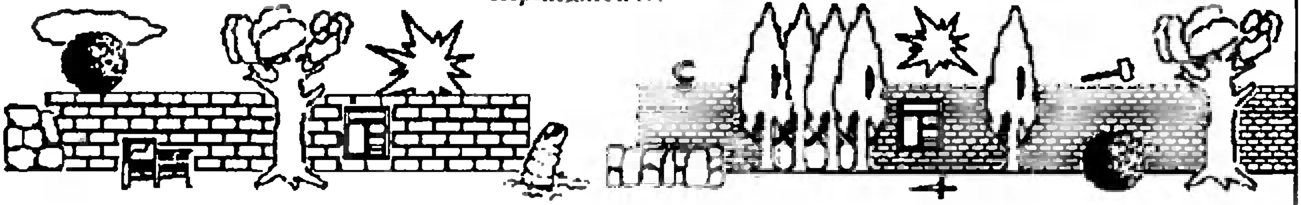
11. Верно! Действительно, три из них делят вершины на пары, а четыре отделяют по одной вершине от трех остальных. Переходите к 8.

12. Ну что вы! Есть еще решения, среди них есть даже целые. Возвращайтесь к 8.

13. Если к целому числу a прибавить 30 или отнять 30, то в обоих случаях получится полный квадрат. Таких чисел a
бесконечно много: переходите к 22,
одно: переходите к 2,
два: переходите к 10.

14. Вы абсолютно правы! Единица не относится ни к простым, ни к составным числам. Разумеется, это просто соглашение между математиками. Одно время единицу считали простым числом, но потом сочли более удобным не причислять ее ни к простым, ни к составным числам. Переходите к 17.

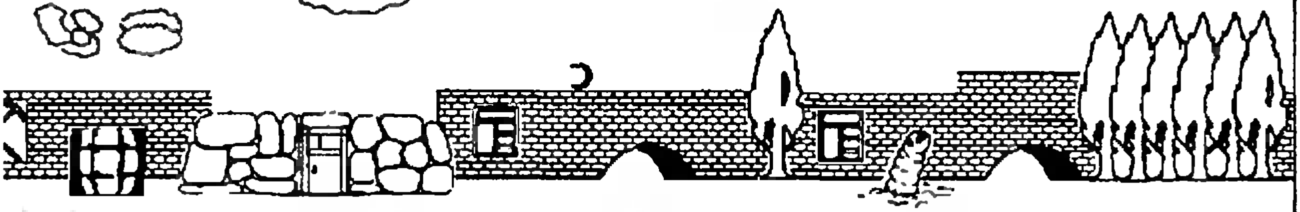
15. Неплохо, но это не все решения. Попробуйте построить графики функций $y = x^2$ и $y = 2^x$. Взгляните на них и возвращайтесь к 8.



16. Вы рассмотрели не все случаи расположения плоскостей. Кроме рассмотренного вами случая есть и другой, менее очевидный. Возвращайтесь к 1.

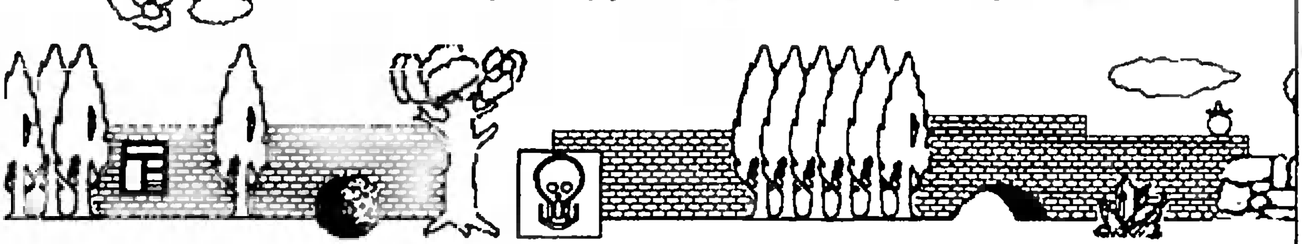
17. Центр тяжести проволочного треугольника расположен
в точке пересечения его медиан: переходите к 3,
в точке пересечения его биссектрис: переходите к 20,
ни в одной из этих точек: переходите к 7.

18. Угадали! А может быть, вы сможете доказать, что их ровно три? Это числа 2, 4 и $-0{,}7666\ldots$. Переходите к 4.



19. Нет! Это самое маленькое число из указанных. Возвращайтесь к 5.

20. Ответ неверен. Конечно же, для равностороннего треугольника эта точка совпадает с точкой пересечения биссектрис (медиан, высот и т.д.), но, например, для равнобедренного треугольника с маленьким основанием и большими боковыми сторонами точка пересечения биссектрис будет близка к основанию, а центр тяжести периметра будет близок к серединам боковых сторон. Возвращайтесь к 17.



21. Нет. Простое число должно содержать ровно два различных делителя: себя и единицу, а у единицы эти числа равны. Возвращайтесь к 4.

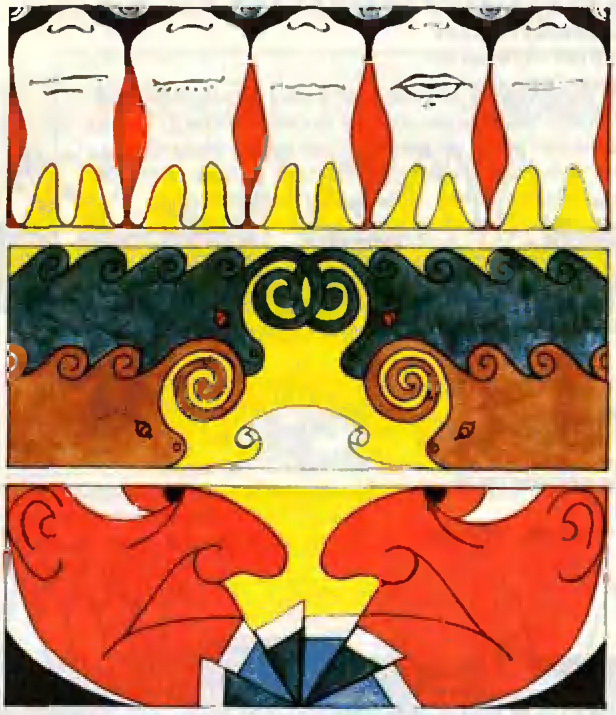
22. Вы ошиблись. Следует заметить, что с увеличением числа n разность между соседними квадратами $(n+1)^2$ и n^2, равная $2n+1$, увеличивается, и при n больших 30 она становится большей 60, следовательно, таких чисел a лишь конечное число. Возвращайтесь к 13.

23. Ну какое же оно составное? Ведь составным числом называется число, имеющее не менее двух отличных от единицы делителей. Возвращайтесь к 4.

24. Вы абсолютно правы! Это число 7^{44}. Чтобы это проверить, достаточно извлечь из указанных чисел корень 11 степени. Получаются числа $2^{11} = 2048$, $9^3 = 729$ и $7^4 = 2401$. Поздравляем вас с завершением пути по лабиринту! Надеемся, что вы прошли по самому короткому его пути: 1 – 11 – 8 – 18 – 4 – 14 – 17 – – 7 – 13 – 10 – 5 – 24.

Составитель А. Савин

Задачи



1. Когда у больного удалили зуб, в его верхней челюсти оказалось в 4 раза больше зубов, чем их было в нижней челюсти в прошлом году. Сколько зубов осталось у пациента после операции, если до нее в верхней челюсти было в 5 раз больше зубов, чем в нижней? *И.Акулич* (Беларусь)

2. Восстановите пять пропущенных членов последовательности: 102, 105, 111, 114, 120, 123, 129, ?, ?, ?, ?, ?, 201, 204, 210, 213, 219,...
«Mathematical teacher» (США)

$$\begin{array}{r} БАРАН \\ БАРАН \\ +\ БАРАН \\ БАРАН \\ \hline СТАДО \end{array}$$

3. Решите арифметический ребус. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным – разные.
Ф.Мурадов (Азербайджан)

4. Капиталист Вова сказал капиталисту Боре: «Если 3/5 моего капитала увеличить на 7 рублей, то получится твой капитал». На что Боря заметил: «Выходит, что у тебя всего на 3 рубля больше, чем у меня». Определите величины их капиталов.
Н.Антонович

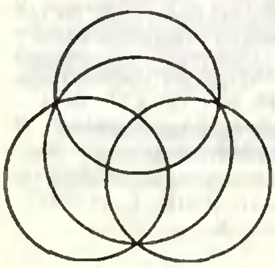
5. Два равнобедренных угольника приложены друг к другу так, как показано на рисунке. Докажите, что середины сторон образованного невыпуклого четырехугольника являются вершинами квадрата.
В.Произволов

Конкурс «Математика 6-8»

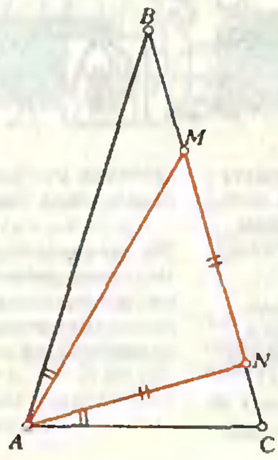
В этом номере мы заканчиваем публикацию задач очередного конкурса для учащихся 6 – 8 классов. Итоги конкурса будут опубликованы в пятом номере журнала, там же начнется новый конкурс «Математика 6 – 8», который мы проводим совместно с Российским благотворительным фондом «Интеллект». Решения задач из этого номера высылайте не позже 15 июня 1994 года по адресу: 103006 Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6 – 8»). Не забудьте указать фамилию, имя, класс.

16. Какое из чисел больше: $(1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot1993)^2$ или 1993^{997}?
С.Дворянинов

17. Четыре окружности расположены так, как показано на рисунке. В десяти образованных при этом ячейках записали цифры 0, 1, 2,..., 9 так, чтобы сумма чисел в каждом круге была одна и та же. Какое наибольшее и какое наименьшее значение может принимать такая сумма?
А.Савин



18. На боковой стороне равнобедренного треугольника ABC находятся точки M и N, причем $MN = AN$. Известно, что углы BAM и NAC равны. Найдите величину угла MAC.
В.Произволов



19. Покажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не оканчивающихся нулем, сумма цифр которых равняется сумме цифр их квадратов.
Л.Курляндчик

20. На шахматной доске расставьте 16 черных и 16 белых фигур так, чтобы на каждой горизонтали, на каждой вертикали и на каждой диагонали количество черных фигур равнялось количеству белых. Удастся ли вам это сделать с 15-ю черными и 15-ю белыми фигурами?
С.Токарев

Подготовишки

Ф. ЛАЙБЕР

Есть учителя, наделенные даром волшебства. Им дано — утихомирить бесенят: и те испытывают свои смертоносные чары не на живых людях, а на куколках, вырезанных из бумаги. Им дано — расшевелить ангелочков: и те хватают чопорные свои нимбы, принимаясь играть ими в «попади-кольцом-на-колышек». Возымей они вдруг желание, такие учителя и кошек научат говорить. Причем грамотно.

Урок географии мисс Уиллард закончила, задернув шторкой рельефный глобус Земли, совершеннее которого просто быть не могло, и бросив распаляющую воображение фразу: «Западное полушарие — через полтора дня». Потом она вальяжно раскинулась на учительском столе (ни дать ни взять — морской лев или красотка с обложки модного журнала!) и объявила: «А теперь физика. Три закона Ньютона».

— Эйнштейн их опроверг, — довел до ее сведения Бип.

— Они все равно верны — как частный случай, — довел до его сведения Бойси.

— Только такие и способны принять лентяи да олухи вроде вас, — уела обоих мальчишек пухленькая, словно мишка-панда, Беттьян.

Строго посмотрев на всех троих, мисс Уиллард взяла в рот пинг-понговый шарик и с силой вытолкнула его воздушной струей. Шарик полетел через весь класс, едва не задев макушку Бипа. Ударившись о дюралевую переборку, целлулоидный бродяга отскочил от нее и полетел обратно точно тем же путем — будто сам себе в воздухе колею проторил. Тощая и проворная, как обезьяна-паук, Кики на малюсенький миг опоздала перехватить его. А мисс Уиллард вскинула голову (ну, точно морской лев!) и ухватила шарик губами.

— Ага, подвинулись все-таки! — критически оценил Бип.

— Ерунда, всего-то на три дюйма, — утешил Бойси.

Мисс Уиллард сделала вид, будто жует и глотает пинг-понговый шарик. «Чистая мята!» — сообщила она ребятам с чарующей улыбкой. И тут же: «Закон первый: тело движется по прямой или покоится... (тут она вытащила изо рта слегка перепачканный помадой шарик, ненадолго подвесила его в воздухе, затем накрыла ладонью)... если на него не оказывается воздействие».

Учительница раскрыла ладонь — в ней оказался бильярдный шар. Она катанула его туда-сюда, демонстрируя, как сильно оттягивает костяной колобок кисть руки, потом подвесила шар в воздухе и с размаху ударила по нему сложенным вдвое листком бумаги: смотрите, мол, какой тяжелый этот шар (тот едва-едва сдвинулся).

«Закон второй: тело меняет направление движения пропорционально действующей на него силе и стремится принять направление данной силы».

Учительница, согнув руку в локте, запустила шаром, словно ядром, со всего плеча. Массивный снаряд избрал траекторию, проложенную шариком пинг-понга — будто та колея все еще пролегала по воздуху. На этот раз Кики изловчилась и... тут же отдернула шесть извивающихся пальцев, словно в каждый из них впилось по жалу. Мисс Уиллард как бы между прочим заметила: «Во времена Гражданской войны солдатам руки отрывало, когда они пытались проделать то же самое с пушечными ядрами».

Ядро из слоновой кости выгнуло — бонгг! — дюралевую переборку на ноте «до» среднего регистра и рвануло обратно. Вогнувшись, переборка издала — бонгг! — звук тоном выше. «Теперь черед мистера Флеминга — ждите от него подачу», — не без подковыристого самодовольства предупредила Беттьян учительницу. Но та была слишком занята: сморщив носик (ну, вылитый кролик!), мисс Уиллард хорошенько прицелилась и выпулила изо рта пинг-понговый шарик, который, пролетев до середины класса, врезался в бильярдный шар и с цокнувшим вжиком метнулся от него под тупым углом. Бильярдный шар мисс Уиллард поймала вытянутой рукой.

Из-под стола показалась другая ее рука с пневмопистолетом, заряженным пластиковым шариком. Подвесив в воздухе пистолет боком к классу, учительница произнесла: «Закон третий: действие и противодействие равны и противоположно направлены» — и спустила курок. Шарик вылетел из дула, а магниевый пистолет величественно, будто космолет на стыковку, двинулся вперед.

Бип зевнул и сказал: «Про такое всякий догадаться может».

«Походи в школу на Луне — в жизнь не догадаешься, — отпарировала мисс Уиллард и добавила, переводя взгляд с Бипа на шестипалую ученицу. — Или на Марсе, да?» Кики истово закивала своими темными антеннами.

Открылся люк. Лысеющий человек с нарочито сердитым выражением лица протиснул в него верхнюю часть туловища. Вовремя, нечего сказать: прямо на него наплывал бороздивший просторы класса пистолет. Человек моргнул и машинально ухватил оружие.

«Мисс Уиллард, — начал мистер Флеминг, — эти отсеки никоим образом не предназначены ни для стрельбища, ни для кортов, ни для...» И тут до него дошло, что он размахивает пистолетом перед классом, который весь как один вытянулся и застыл с поднятыми вверх руками. Безнадежно вздохнув, человек оборвал свою речь на полуслове.

Прозвенел звонок. Детишки, словно выпущенные в воду рыбки, серебристой стайкой скользнули к люку и, обогнув мистера Флеминга, стремглав ринулись в коридор. Будто булавочки, головками притянутые к магниту, расположились они вокруг иллюминатора, в котором на фоне усыпанной звездами черноты виднелся округлый глобус Земли.

Табличка над люком гласила:

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
СПУТНИК «ГАММА»
ГОДДАРСКАЯ
НАЧАЛЬНАЯ ШКОЛА

Да, некоторые учителя наделены даром волшебства. И некоторые школы — тоже.

Перевел с английского В. Мисюченко по тексту изданного в Канаде сборника «100 очень-очень коротких превосходных научно-фантастических рассказов».


1:7 = 0,142857
I. 1/5 = 0,2; 3/40 = 0,075;
II. 4/9 = 0,4444...;
0,142857142857...;
III 1/6 = 0,1666 7/30 = 0,2333

Периодические десятичные дроби

Г. РАДЕМАХЕР, О. ТЕПЛИЦ

От обыкновенной дроби — к десятичной

При обращении обыкновенных дробей в десятичные мы встречаемся, как известно, с тремя различными случаями, о характере которых дают представление следующие типичные примеры:

$$\text{I. } 1/5 = 0{,}2;\ 3/40 = 0{,}075;$$

$$\text{II. } 4/9 = 0{,}4444\ldots;\ 1/7 = 0{,}142857142857\ldots;$$

$$\text{III. } 1/6 = 0{,}1666\ldots;\ 7/30 = 0{,}2333\ldots$$

Упражнение 1. Обратите в десятичные дроби $1/90$, $1/16$, $1/125$, $1/13$, $1/17$, $1/68$.

Наиболее простыми здесь являются примеры первой строки. Если вспомнить, что десятичные дроби суть дроби, у которых знаменателями служат степени десяти, то приведенные в примерах I дроби можно записать еще следующим образом:

$$1/5 = 2/10;\ 3/40 = 75/1000.$$

Эти равенства не заключают в себе ничего особенного. Они утверждают лишь, что данные обыкновенные дроби можно представить в таком виде, что знаменателями их будут степени 10. Возможно это для всех тех дробей, у которых знаменатель входит множителем в некоторую достаточно высокую степень 10, т.е. всякий такой знаменатель не содержит никаких других простых множителей, кроме 2 и 5.

Если в знаменатель данной нам дроби входит, кроме того, еще некоторый другой множитель k, не делящийся ни на 2, ни на 5, то такую дробь превратить описанным способом в десятичную будет, очевидно, уже нельзя; действительно, если допустить, что

$$\frac{1}{2^\alpha 5^\beta k} = \frac{a}{10^\delta} = \frac{a}{2^\delta 5^\delta},$$

то мы должны были бы заключить, что

$$2^{\delta-\alpha}5^{\delta-\beta} = ak,$$

откуда k (если оно не равно 1) должно было бы делиться на 2 или на 5, так как в силу единственности разложения на простые множители в ak, а следовательно также и в k, не может войти никаких других простых множителей, кроме 2 и 5.

Подобного рода примеры приведены в строках II и III. В этих случаях говорят, что дроби $4/9$, $1/7$, $1/6$ и $7/30$ можно превратить в бесконечные десятичные дроби. Для них процесс обращения не обрывается, но дает все новые и новые десятичные знаки.

Так как существует всего лишь 10 цифр, то некоторые из этих цифр должны, конечно, повторяться в любой бесконечной десятичной дроби. Однако не следует думать, что по этой причине всякая бесконечная десятичная дробь будет периодической. Пример бесконечной не периодической десятичной дроби дает дробь

$$0{,}101001000100001\ldots,$$

составленная из нулей и единиц так, что за n-й единицей следуют всякий раз n нулей.

Примеры дробей, в знаменатели которых кроме 2 и 5 входят еще и другие простые множители, приведены в строках II и III. Относительно таких дробей мы хотим доказать, что они разлагаются в периодические десятичные дроби. Известно, что десятичная дробь получается из соответствующей простой в результате повторного выполнения операции деления, например:

$$1:7 = 0{,}142857\ldots$$

$$\begin{array}{rl}
10 & \big|\ 7 \\
\underline{7} & \big|\ 142857\ldots \\
30 & \\
\underline{28} & \\
20 & \\
\underline{14} & \\
60 & \\
\underline{56} & \\
40 & \\
\underline{35} & \\
50 & \\
\underline{49} & \\
1 &
\end{array}$$

Как только в этом примере мы получаем в остатке 1, вычислительный процесс, который был начат нами также с 1, возобновляется сначала, и, значит, полученная нами десятичная дробь будет иметь период 142857. Так как и в дальнейшем нам неоднократно придется иметь дело с подобного рода последовательными делениями, мы введем для них сокращенное обозначение. Мы будем писать, например,

$$1:7 = 0{,}\overline{142857}\ldots,$$
$$\text{1 3 2 6 4 5 1}$$

указывая мелким шрифтом остатки, относящиеся к соответствующим частным; период бесконечной десятичной дроби мы будем отмечать горизонтальной чертой сверху.

Другим примером может служить дробь

$$3:41 = 0{,}\overline{07317}\ldots$$
$$\text{3 30 13 7 29 3}$$

Процесс деления повторяется здесь при появлении остатка 3, так как именно с 3 он и был начат. Частные могут повторяться при этом и раньше, как, например, в данном случае цифра 7, однако окончательным критерием для повторения всего процесса деления и, следовательно, замыкания периода является повторение *остатка*.

Но поскольку ненулевых остатков всего $b-1$ (это $1, 2, 3, \ldots, b-1$), то в процессе последовательных делений один из них повторится на шаге с номером b. Следовательно, дробь a/b должна дать при обращении периодическую дробь, причем период ее будет содержать, самое большее, $b-1$ знаков. В дроби $1/7$ достигнута именно эта максимальная длина периода; в дроби $3/41$, как показывает наш пример, действительная длина периода значительно ниже максимальной.

Длина периода

Будем сейчас рассматривать только такие дроби, знаменатели которых взаимно просты с 10, т.е. не содержат множителей 2 и 5. Для этого случая мы сможем определить максимальное число знаков периода дроби a/b несколько точнее.

Будем считать, что дробь a/b несократима. *В таком случае при делении в остатках появляются только числа взаимно простые с b.* Пусть одним из таких взаимно простых с b остатков

Перепечатывается из книги Г. Радемахера и О. Теплица «Числа и фигуры» (М.: ГИФМЛ, 1962).

будет r. Следующая операция в вычислениях будет состоять в делении $10r$ на b; пусть получающееся при этом частное будет q. Значит, b в $10r$ будет содержаться q раз, причем может еще получиться остаток r_1:

$$10r = qb + r_1,$$

или

$$r_1 = 10r - qb.$$

Тогда и r_1 должно быть взаимно простым с b, так как ни один простой множитель b не входит ни в 10, ни в r, а значит, и ни в $10r$, ни в $10r - qb$. Следовательно, за каждым взаимно простым с b остатком r следует подобный же остаток r_1.

Так как при этом с самого начала мы исходили из остатка a, взаимно простого с b, значит, и в дальнейшем все возникающие остатки будут взаимно простыми с b. Отсюда мы можем заключить, что *период дроби a/b может иметь, самое большее, столько же знаков, сколько может быть остатков, взаимно простых с b*.

Количество остатков, взаимно простых с некоторым числом b, само по себе представляет интересную величину. В теории чисел его обозначают обычно через $\varphi(b)$ и называют функцией Эйлера. Например, $\varphi(2)=1$, $\varphi(3)=2$, $\varphi(4)=2$, $\varphi(5)=4$, $\varphi(6)=2$, $\varphi(7)=6$, $\varphi(8)=4$. Так как, в частности, для простого числа p все $p-1$ предшествующих чисел взаимно просты с ним, то $\varphi(p) = p - 1$.

Итак, *период дроби a/b при b, взаимно простом с 10, содержит, самое большее, $\varphi(b)$ знаков.*

Где начинается период?

Мы можем уже утверждать, что период должен быть, однако мы еще не можем указать, где он должен начаться. В примерах II период начинается сейчас же после запятой, в примерах III — лишь через несколько знаков после запятой. При этом знаменатели в примерах II отличаются тем свойством, что в них нет ни одного множителя, общего с 10.

Мы покажем теперь, что период десятичной дроби a/b начинается всегда тотчас же после запятой в том случае, если b и 10 взаимно просты. Для этого нам нужно показать, что первый повторяющийся остаток тождественно равен первому остатку, т.е. числителю. Действительно, пусть у нас оказались равными два остатка: $r_n = r_m$; в таком случае и предшествующие им остатки (если таковые имеются) также должны быть равны: $r_{n-1} = r_{m-1}$. Чтобы убедиться в этом, напишем разность двух выражений:

$$10r_{m-1} = q_{m-1}b + r_m,$$

$$10r_{n-1} = q_{n-1}b + r_n,$$

и, положив в ней $r_n = r_m$, получим:

$$10(r_{m-1} - r_{n-1}) = (q_{m-1} - q_{n-1})b.$$

Значит, $10(r_{m-1} - r_{n-1})$ делится на b. Но так как b — число, взаимно простое с 10, то на b должна делиться разность $r_{m-1} - r_{n-1}$. Но так как, с другой стороны, r_{m-1} и r_{n-1} являются остатками, и, значит, должны быть меньше b, то и абсолютное значение их разности меньше b, т.е.

$$r_{m-1} - r_{n-1} = 0.$$

Период, таким образом, должен начаться непосредственно после запятой.

Упражнение 2. Докажите, что если число b не взаимно просто с 10 и содержит простой множитель, отличный от 2 и 5, то у всякой несократимой дроби a/b имеется «предпериод».

Еще о длине периода

Если длину периода обозначить через λ, то при обращении дроби a/b в десятичную мы получим после λ делений в остатке снова a. Но ведь при каждом делении мы приписываем к делимому справа нуль, поэтому, получая в остатке a, мы делим собственно не a, а $a \cdot 10^\lambda$. Следовательно, $a \cdot 10^\lambda - a$ делится на b. Но так как a взаимно просто с b, то выражение $10^\lambda - 1$ делится на b. При этом λ — наименьшее число, для которого $10^\lambda - 1$ делится на b, поскольку период замыкается уже при первом появлении остатка a. Мы имеем, таким образом, теорему:

Длина периода b дроби a/b есть наименьшее число $\lambda(b)$, при котором выражение $10^\lambda - 1$ делится на b.

В этой теореме содержатся два утверждения, заслуживающих того, чтобы обратить на них особое внимание. Во-первых, здесь утверждается, что для данного b, взаимно простого с 10, можно указать такое число $\lambda(b)$, что выражение $10^\lambda - 1$ делится на b. Во-вторых, доказано, что λ зависит только от b, но не от a. Все несократимые дроби a/b с одинаковым знаменателем b имеют одинаковую длину периода $\lambda = \lambda(b)$.

Рассмотрим теперь совместно несколько разложений a/b в десятичные дроби при различных a, но с одним и тем же постоянным b. Мы уже имели разложение

$$1:7 = 0,\overline{142857}\ldots$$
1 3 2 6 4 5 1

Для сравнения вычислим

$$2:7 = 0,\overline{285714}\ldots$$
1 6 4 5 1 3 2

Период 285714, соответствующий дроби $2/7$, получается из периода 142857, соответствующего дроби $1/7$, путем простой циклической перестановки цифр; среди остатков разложения $1/7$ встречаются и все прочие остатки. Если каждой цифре периода поставлен в соответствие остаток, из которого она получается в результате деления:

остатки	1	3	2	6	4	5
частные	1	4	2	8	5	7

то из этой таблицы можно тотчас же увидеть разложения всех дробей $a/7$ при $2 \le a \le 6$. Так, 67=$0,\overline{857142}\ldots$
1 4 5 1 3 2 6

Периодичность обнаруживается, таким образом, не только в появлении через определенные промежутки одинаковых частных, но и в чередовании остатков. Поэтому мы будем теперь говорить не о периодах вообще, а о *периодах частных* и *периодах остатков*.

Не всегда период разложения a/b достигает той максимальной длины $\varphi(b)$, которой он, согласно нашим исследованиям, не может превзойти. Для $1/7$ и $1/17$, как показывают наши примеры, получается максимальная длина периода, для $3/41$ — не максимальная. Какова длина периода в действительности — вопрос трудный, и решается он в каждом конкретном случае путем непосредственного вычисления. Тем не менее мы можем относительно *действительной длины периода* $\lambda(b)$ дать кое-какие указания, более определенные, чем уже найденное неравенство $\lambda(b) \le \varphi(b)$.

Конкретизируем наши рассуждения на новом примере $1/21$, для которого $\lambda(21) < \varphi(21)$. Мы имеем:

$$1:21 = 0,\overline{047619}\ldots,$$
1 10 16 13 4 19 1

откуда $\lambda(21) = 6$. В процессе деления встречаются, следовательно, не все 12 взаимно простых с 21 остатков, а только 6, которые мы вместе с соответствующими частными соберем в таблице:

А

остатки	1	10	16	13	4	19
частные	0	4	7	6	1	9

Из этой таблицы видно, что

$$10:21 = 0,\overline{476190}\ldots,\quad 4:21 = 0,\overline{190476}\ldots$$

Остаток же 2 здесь не встречается, и для разложения $2/21$ мы должны получить нечто новое. Действительно,

$$2:21 = 0,\overline{\underset{2}{0}\,\underset{20}{9}\,\underset{11}{5}\,\underset{5}{2}\,\underset{8}{3}\,\underset{17}{8}}\underset{2}{}\ldots,$$

что дает таблицу

В

остатки	2	20	11	5	8	17
частные	0	9	5	2	3	8

Здесь новым является не только остаток 2, но и все остальные, что можно было и заранее предвидеть. Ведь каждый остаток однозначно определяет ход разложения, в частности, любой остаток таблицы (А) влечет за собой весь шестичленный период остатков (А). Если бы, следовательно, в периоде остатков (В) содержался хотя бы один остаток из (А), в нем должны были бы содержаться и все остальные остатки из (А), а так как в нем только 6 членов, никаких иных остатков в нем не могло бы быть. В обеих же таблицах (А) и (В) содержатся теперь как раз все 12 остатков, могущие быть числителями несократимых правильных дробей со знаменателем 21.

В построении таблиц (А) и (В) для знаменателя 21 заложена некоторая общая идея, на которой мы хотим остановиться.

Если разложение $1/b$ имеет максимальную длину периода, $\lambda(b) = \varphi(b)$, то получается только одна таблица периода, как, например, для $1/7$ (см. выше).

Если, напротив, $\lambda(b) < \varphi(b)$, как для $b=21$, то при разложении $1/b$ могут появиться только $\lambda(b)$ остатков, из которых мы построили таблицу (А). В этой таблице содержатся не все $\varphi(b)$ взаимно простых с b остатков. Пусть r – остаток, не входящий в таблицу (А). Разложив дробь r/b, мы получим период, в котором будет также $\lambda(b)$ цифр. Получающиеся при этом остатки и частные мы выделим в новую таблицу (В). В ней будет не содержащийся в таблице (А) остаток r, и все другие ее остатки также будут отличаться от всех остатков таблицы (А).

Таблицы (А) и (В) вместе содержат $2\lambda(b)$ различных взаимно простых с b остатков. Если $2\lambda(b) = \varphi(b)$, то возможные остатки исчерпаны. В противном случае повторим весь процесс еще раз и будем строить одну таблицу за другой, пока не будет исчерпан весь запас $\varphi(b)$ остатков.

По окончании такого построения все $\varphi(b)$ взаимно простых с b остатков будут разнесены, скажем, по k таблицам, причем каждый из них входит только в одну таблицу. Таким образом,

$$\varphi(b) = k\lambda(b).$$

Тем самым мы получим теорему:

Длина периода $\lambda(b)$ есть делитель $\varphi(b)$.

Для простого числа p, как уже было замечено выше, $\varphi(p) = p - 1$. В частности, мы получаем, что длина периода $\lambda(p)$ дроби a/p для простого числа p есть делитель разности $p - 1$; с примерами, иллюстрирующими этот закон, мы уже встречались в наших вычислениях: $\lambda(3) = 1$, $\lambda(7) = 6$, $\lambda(41) = 5$.

Теоремы Эйлера и Ферма

Из полученных нами сведений о длине периода выведем еще одно важное заключение; для этого нам придется воспользоваться известным разложением на множители

$$x^k - 1 = (x-1)\left(x^{k-1} + x^{k-2} + \ldots + 1\right) \quad (*)$$

(для его доказательства достаточно увидеть, что при приведении подобных членов после умножения все члены, кроме крайних, взаимно уничтожаются).

Положим теперь $x = 10^{\lambda(b)}$, тогда из $(*)$ будет следовать, что $10^{\lambda(b)} - 1$ есть делитель разности $10^{k\lambda(b)} - 1 = 10^{\varphi(b)} - 1$.

Но раньше мы доказали, что b – делитель $10^{\lambda(b)} - 1$; отсюда получается, что b есть также делитель $10^{\varphi(b)} - 1$. Мы приходим, таким образом, к следующей теореме:

Если b есть число, взаимно простое с 10, то $10^{\varphi(b)} - 1$ делится на b.

Эта теорема уже не связана с вопросом о десятичных дробях; величина $\varphi(b)$ имеет совершенно независимое от этого вопроса значение. В частности, *если p есть простое число, не входящее множителем в 10, то $10^{p-1} - 1$ делится на p.*

То обстоятельство, что в обеих этих теоремах фигурирует число 10, совершенно несущественно. Оно вошло сюда лишь случайно по той простой причине, что употребляемая нами цифровая система построена на основании 10. В результате исследования иной цифровой системы с произвольным основанием g и изучения соответствующих g-ичных дробей мы пришли бы к аналогичным выводам:

Если b есть число, взаимно простое с g, то $g^{\varphi(b)} - 1$ делится на b (теорема Эйлера); и в частности:

Если простое число p не является делителем g, то $g^{p-1} - 1$ делится на p (малая теорема Ферма).

От периодической дроби — к обыкновенной

Мы уже установили, что разложение несократимой дроби a/b со знаменателем, взаимно простым с 10, приводит к периодической десятичной дроби, период которой начинается тотчас же после запятой.

Если, наоборот, нам дана периодическая десятичная дробь, перед нами возникает задача узнать, из какой обыкновенной дроби она получена. Пусть длина периода P данной нам дроби есть λ; будем читать λ-значный период как целое λ-значное число, записанное в десятичной системе. Например, для $1/7 = 0,\overline{142857}\ldots$ период $P = 142857$. Тогда легко можно найти дробь a/b, из которой получена данная нам десятичная дробь с λ-значным периодом P. Действительно, при делении a на b через λ знаков должен появиться вновь остаток a, значит, $a \cdot 10^{\lambda} - a$ должно делиться на b, причем частным является период P, заканчивающийся как раз при появлении остатка a, т.е.

$$a\left(10^{\lambda} - 1\right) = bP;$$

отсюда

$$a/b = P/\left(10^{\lambda} - 1\right).$$

Дробь, стоящая в правой части, в общем случае может быть сократимой и приводиться к виду a/b. Так как числа 2 и 5 не являются делителями числа $10^{\lambda} - 1$ и, следовательно, числа b, всякая так называемая *чистая периодическая дробь*, т.е. такая, период которой начинается тотчас же после запятой, возникает из обыкновенной дроби a/b, знаменатель которой b взаимно прост с 10. Обратную теорему мы уже нашли раньше.

Упражнения

3. Обратите в обыкновенные дроби 0,(123), 0,0(17), 0,231(18).

4. Укажите правило обращения в обыкновенную дробь смешанной периодической дроби.

В заключение предлагаем вам подумать над следующей весьма непростой задачей: если p — простое число и период десятичного разложения дроби $1/p$ состоит из $2n$ цифр, то сумма двух n-значных чисел (могущих начинаться и с нуля), образованных первыми n и последними n цифрами периода, является n-значным числом, состоящим из n девяток.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СТРАНИЧКА

Высоты треугольника

1. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1, пересекающиеся в точке H. Докажите, что точки A, B, A_1 и B_1 лежат на одной окружности, а также точки C, H, A_1 и B_1 лежат на одной окружности. Исходя из этого, учитывая равенство углов, опирающихся в окружности на одну дугу, докажите, что прямая CH перпендикулярна AB, а значит, высоты треугольника пересекаются в одной точке.

2. Докажите, что три окружности, симметричные окружности, описанной около треугольника ABC, относительно его сторон, пересекаются в одной точке. Обозначим эту точку через H. Докажите, что H является точкой пересечения высот треугольника ABC. (Второе доказательство того, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.)

3. Проведем через вершины треугольника ABC прямые, параллельные его противоположным сторонам. Эти прямые образуют треугольник $A_1B_1C_1$ (A лежит на B_1C_1, B — на A_1C_1, C — на B_1A_1).

Докажите, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника $A_1B_1C_1$ являются высотами в треугольнике ABC, точнее, задают прямые, на которых лежат эти высоты. (Третье доказательство того, что высоты пересекаются в одной точке.)

4. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC, O — центр описанной около него окружности, A_0 — середина BC. Докажите, что $AH=2OA_0$.

Указание. Рассмотрите треугольник $A_1B_1C_1$, как в предыдущей задаче.

5. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC. Докажите, что любая из четырех точек A, B, C и H является точкой пересечения высот для треугольника с вершинами в трех других. Докажите также, что радиусы описанных окружностей для всех треугольников с вершинами в точках A, B, C и H равны между собой.

6. Три окружности равного радиуса проходят через точку H и вторично пересекаются в точках A, B и C. Докажите, что H — точка пересечения высот треугольника ABC.

7. Докажите, что точки, симметричные точке пересечения высот треугольника относительно его сторон, а также относительно середин его сторон, лежат на описанной около треугольника окружности.

8. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC. Докажите, что отрезок, соединяющий середину стороны BC с серединой отрезка AH, равен радиусу описанной около ABC окружности.

9. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA', BB' и CC', пересекающиеся в точке H. Докажите, что для треугольника $A'B'C'$ точка H является точкой пересечения биссектрис.

Замечание. Если мы построим еще треугольник $A_1B_1C_1$, как в задаче 3, то оказывается, что точка H для треугольников $A_1B_1C_1$, ABC и $A'B'C'$ будет соответственно центром описанной окружности, точкой пересечения высот и центром вписанной окружности.

10. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Найдите угол B, если известно, что $AC=2A_1C_1$.

11. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, AA_1 и BB_1 — высоты в этом треугольнике. Докажите, что прямые OC и A_1B_1 перпендикулярны.

12. Радиус окружности, описанной около остроугольного треугольника, равен R, периметр треугольника с вершинами в основаниях высот данного треугольника равен $2p$. Найдите площадь данного треугольника.

13. Высоты треугольника меньше 1. Может ли его площадь быть больше 100?

14. Постройте треугольник по трем высотам.

15. Пусть O — центр описанной около треугольника ABC окружности, H — точка пересечения его медиан, A_0 — середина BC. В каком отношении медиана AA_0 делится отрезком OH? В каком отношении отрезок OH делится медианой AA_0? Докажите, что точки O, H и M, где M — точка пересечения медиан треугольника ABC, лежат на одной прямой. (Эта прямая называется *прямой Эйлера.*)

16. В треугольнике ABC угол A равен α, $BC=a$. Найдите AH, где H — точка пересечения высот этого треугольника.

17. Через вершину A треугольника ABC проведена прямая, пересекающая BC в точке D и образующая с BC угол α. Найдите расстояние между точками пересечения высот треугольников ABD и ACD, если $BC=a$.

18. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC. Докажите, что основания высот этого треугольника, середины его сторон, а также середины отрезков AH, BH и CH — всего 9 точек — лежат на одной окружности. (*Окружность девяти точек, или окружность Фейербаха.*)

Указание. Докажите сначала, что 4 точки — середины AH, BH и CH и середина BC — лежат на одной окружности, а затем, что середины AH, BH, CH и основание высоты к BC лежат на одной окружности.

19. Найдите геометрическое место точек M, лежащих в плоскости треугольника ABC, для которых $\angle BAM=\angle BCM$, $\angle CAM=\angle CBM$.

20. Пусть A и B — две фиксированные точки плоскости, C — некоторая точка этой плоскости, для которой высота к стороне BC треугольника ABC равна медиане к стороне AC. Найдите геометрическое место точек C.

21. Назовем высотой четырехугольника перпендикуляр, опущенный из середины какой-то его стороны на противоположную сторону. Докажите, что высоты вписанного четырехугольника пересекаются в одной точке.

22. Пусть H_A, H_B, H_C и H_D — точки пересечения высот треугольников BCD, ACD, ABD и ABC соответственно. Докажите, что если $ABCD$ — вписанный четырехугольник, то четырехугольник $H_AH_BH_CH_D$ равен четырехугольнику $ABCD$.

Публикацию подготовил И.Шарыгин

Математической олимпиаде 60 лет

Весной 1994 года состоялась очередная Московская математическая олимпиада школьников. Эта олимпиада — уже 57-я по счету. Но несмотря на свой «некруглый» номер, она является поистине юбилейной.

Ровно 60 лет назад, в далеком 1934 году в Ленинграде впервые в России была проведена олимпиада школьников по математике. С этого знаменательного события и ведут свое начало все наши олимпиады. Именно тогда была заложена традиция активно прививать юношам и девушкам еще на школьной скамье интерес к науке, эффективно содействовать расцвету их способностей. Эта форма участия ученых-математиков в работе со школьниками принесла неоценимые результаты: математические олимпиады дали в свое время первые «путевки в жизнь» многим из тех, кем сегодня по праву гордится наша наука.

В Москве соревнования любителей математики проходили с 1935 года ежегодно (лишь в суровые военные годы был трехлетний перерыв). Вначале олимпиады проводились лишь для учеников последних классов, но потом к ним присоединились даже семиклассники. Составной частью 57-й Московской математической олимпиады впервые станет турнир и для школьников 5—6 классов.

Инициатором и организатором первой в России ленинградской математической олимпиады школьников 1934 года был член-корреспондент Академии наук СССР Борис Николаевич Делоне (1890 — 1980). В юности он отличался разносторонностью интересов и незаурядными способностями, интересовался астрономией (для своих наблюдений он изготовил рефлектор, зеркало которого отшлифовал сам), техникой (он собирал планеры собственной конструкции и совершал полеты на них), серьезно занимался альпинизмом. Но подлинным призванием Б.Н.Делоне была математика, и он вошел в историю науки как крупный специалист по геометрии и математической кристаллографии, алгебре и теории чисел. Много внимания, времени и сил Б.Н.Делоне всегда уделял преподаванию, подготовке новой научной смены.

В память Б.Н.Делоне с 1994 года на Московской математической олимпиаде учреждается специальный приз его имени за лучшее решение геометрической задачи.

Отмечая замечательный юбилей, журнал «Квант» публикует статью об олимпиаде 1934 года и задачи, предлагавшиеся ее участникам. Все эти материалы перепечатываются из малоизвестного сегодня сборника «Математическое просвещение» (выпуск третий; Москва — Ленинград, 1935). Будучи подлинными историческими документами, они наилучшим образом передают дух и реальную обстановку того времени, когда родилась первая олимпиада. А искушенному читателю будет интересно еще раз увидеть, какой громадный скачок произошел за прошедшие годы не только в математической науке, но и в математическом образовании.

Напомним, что журнал «Квант» уже помещал статьи, посвященные этому событию (см. «Квант», 1984, №№ 8, 9).

Н.Розов,
председатель Оргкомитета
57-й Московской математической
олимпиады школьников

Математическая олимпиада Ленинградского государственного университета им. А.С.Бубнова

I

Весной 1934 года Ленинградским государственным университетом им. А.С. Бубнова было проведено чрезвычайно ценное и важное мероприятие в области математического образования в нашей стране: была организована математическая олимпиада среди учащихся средних школ г. Ленинграда (девятилеток и рабфаков). Устраивая эту олимпиаду, университет руководился тем соображением, что грандиозные задачи второй пятилетки в области социалистического строительства настоятельно требуют возможно быстрой и лучшей подготовки новых кадров работников социалистической стройки. В этой подготовке приобретение учащимися знаний по математике имеет особенно важное значение, так как на математике основывается не только всякая техническая деятельность, но она же является необходимой основой для научно-исследовательской работы и в области естественных и общественных наук. Устраиваемая университетом олимпиада должна была дать ценные материалы для суждения о степени математической подготовленности абитуриентов наших средних школ и о ведении в них преподавания математики. В то же время олимпиада должна была выявить наиболее одаренных и подготовленных молодых людей в области математики, подобно тому как в настоящее время принимаются меры к выявлению талантливой молодежи в области техники, искусства, физкультуры и пр.

Проведение олимпиады было организовано чрезвычайно продуманно и серьезно. Был организован специальный комитет олимпиады в составе председателя профессора Б.Н.Делоне, 10 других профессоров и преподавателей ЛГУ, а также представителей парткома ЛГУ, комитета ВЛКСМ, сектора научно-технической пропаганды, гороно и преподавателей математики. Самое проведение олимпиады комитетом было разбито на три тура. В первом туре была проведена широкая информация о предстоящей олимпиаде, ее целях и устройстве, а также широко распространен ряд задач для ориентации будущих участников в характере предстоящего соревнования. Кроме того, комитет обратился к учебным заведениям с предложением командировать для участия в олимпиаде своих сильнейших по математике учащихся выпускных классов в количестве: 3 человека на каждую группу девятилетки, 5 человек на каждую выпускную группу рабфаков и 10% из общего числа оканчивающих курсы по подготовке в вузы. Во втором туре присланные учащиеся были подвергнуты письменному испытанию по математике при ЛГУ с целью выделения из них наилучших математиков средней школы г. Ленинграда в 1934 г. С выделенными лицами была при ЛГУ проделана дополнительная работа по подготовке к третьему туру олимпиады, состоящая в чтении им лекций по математике, ведении занятий, решении задач и т.п. После этого состоялся третий тур олимпиады, причем упомянутым лицам были даны новые задачи для решения. На основании представленных решений 11 человек были признаны победителями, а 10 следующих по конкурсу товарищей — достойными премирования. Результаты соревнования были объявлены в ЛГУ в торжественной обстановке.

II

Фактически участников олимпиады оказалось менее, чем предполагал комитет, именно 307 человек. Уменьшение произошло потому, что некоторые школы не прислали своих выпускников на конкурс, мотивируя это слабостью своих абитуриентов по математике, другие же послали менее участников, чем предполагалось, например, рабфак Института путей сообщения — только трех, мотивируя это тем, что он готовит кадры для себя, а не для университета... В общем же инициатива комитета была встречена учащими и учащимися средних учебных заведений г. Ленинграда с полнейшим сочувствием и интересом, и задачи, предварительно опубликованные комитетом олимпиады, с увлечением прорабатывались по школам. 2-й тур олимпиады фактически представлял собой отборочное соревнование. Упомянутые 307 человек были собраны 18 апреля в 11 часов утра в университете и после вступительных разъяснений, сделанных проф. Б.Н.Делоне для рабфаковцев и проф. В.М.Смирновым — для школьников, каждому участнику олимпиады были предложены три несложных задачи: одна по алгебре — на решение уравнений, другая — по планиметрии на доказательство и третья по стереометрии — на вычисление с тригонометрией. Задачи были подобраны настолько нетрудные, что умение решать их еще далеко не обеспечивает возможности нормально работать на 1 курсе втуза, не говоря уже о физматах университетов; более сложные и трудные отделы элементарной математики в них включены не были, ввиду указания представителей учебных заведений, что эти отделы (тригонометрические уравнения и преобразования, решение треугольников, теория соединений и бином Ньютона, задачи на построение и т.д.) ими не проходились вовсе или изучались слабо.

Все три задачи решили только 49 человек (24 школьников, 24 рабфаковца и 1 индивидуальный участник), 29 человек решили по две задачи, а остальные 69% явившихся написали работу неудовлетворительно, решив лишь одну, или ни одной задачи, а 11 человек из числа явившихся совсем не подали работ. Поэтому к окончательному соревнованию были допущены только упомянутые 49 человек, из которых на него явилось 48. Таким образом участников последнего испытания явилось значительно менее, чем ориентировочно предполагал комитет олимпиады, рассчитывавший на участие в нем 100 — 150 лучших математиков из абитуриентов школ 1934 г. Как было упомянуто, с ними была проделана большая дополнительная работа при ЛГУ, причем в качестве материала для подготовки комитетом были составлены и сообщены участникам олимпиады 90 задач из различных отделов алгебры, геометрии и тригонометрии, требующие для своего решения некоторой находчивости и сообразительности. Такого же характера были и задачи, предложенные на окончательном испытании, которое должно было выявить победителей и вообще «лучших из лучших» ленинградских математиков, оканчивающих школу в 1934 г.

III

Основная задача, поставленная себе комитетом олимпиады, именно выявление лучших математиков среди оканчивающих курс средней школы в текущем учебном году, была таким образом умело и искусно выполнена. Но наряду с этим комитетом был собран огромный материал, касающийся постановки преподавания математики в средней школе Ленинграда, который позволяет сделать выводы, имеющие значения для суждения о достижениях в области математического образования и о настоятельных его нуждах в СССР вообще. Этот материал был разработан особой комиссией из руководителей олимпиады под председательством проф. Г.М.Фихтенгольца. Кроме материалов, доставленных проведением 2-го и 3-го туров олимпиады, комиссия имела еще беседы с учащимися и с рядом наиболее компетентных преподавателей средних школ, в частности — из числа членов комитета олимпиады, ведущих занятия в девятилетках и рабфаках. Затем была использована работа существующего при ЛГУ Института по повышению квалификации педагогов, а также устроено обширное совещание, в котором приняли участие, кроме профессоров ЛГУ, еще профессора некоторых втузов, представители гороно, инструкторы и методисты районов и др. В результате комиссия составила обширную записку, касающуюся всех сторон вопроса о постановке математического образования в СССР.

Не имея возможности коснуться всех выводов, сделанных названной комиссией, мы остановимся лишь на некоторых отмечаемых ею недочетах постановки у нас преподавания математики, которые, впрочем, и ранее неоднократно констатировались в разных органах, ведающих делом народного образования в стране. Так, 2-й и 3-й туры олимпиады подтвердили и ранее замеченные дефекты в математическом образовании наших школьников, заключающиеся в том, что они получают очень слабое теоретическое развитие, а также страдают недостатком геометрического представления. Несколько лучше обстоит дело с техникой буквенных вычислений, но и она, в особенности в области тригонометрии, недостаточна. Вообще математический багаж, получаемый учащимися в школе, в настоящее время является еще весьма малым. В частности, учащиеся затрудняются ясно, связно и последовательно излагать свои мысли по теоретическим вопросам. Во многих учебных заведениях не прорабатывается полностью программа, как это уже было упомянуто выше, или же прорабатывается с крайне слабым прохождением более трудных отделов. Наиболее одаренные не выделяются как-либо школой, и с ними не ведется дополнительной работы и т.п.

Одной из основных причин указанных и других отрицательных явлений у нас в области математического образования комиссия считает недостаточную квалификацию преподавателей математики, и с этим нельзя не согласиться. Действительно, даже в Ленинграде имеется 73% преподавателей школ I ступени и 55% преподавателей школ II ступени без высшего образования. Во многих же других городах Союза математику преподают лица, прошедшие только семилетку или краткосрочные педагогические курсы. Педагогические техникумы и педвузы пока еще тоже выпускают преподавателей невысокой квалификации. Так как при стремительном росте в СССР числа школ количество достаточно знающих преподавателей математики, выпускаемых вузами и педвузами, еще долго будет отставать от необходимой нормы, то желательно принять меры для повышения квалификации уже имеющихся преподавателей. Следует уничтожить имеющуюся сейчас уравниловку и давать преимущества служебного и материального свойства тем учителям, которые оказываются более талантливыми, знающими и особенно успешно работающими педагогами. Крайне желательно прийти им на помощь и изданием соответствующей научной и учебной литературы. В настоящее время источником сведений по математике как для преподавателя, так и для ученика является только стабильный учебник. Но изданные до сих пор стабильные учебники оказываются мало удовлетворительными. Поэтому желательно издание математических пособий, журналов, сборников, хрестоматий и пр., из которых учителя математики могли бы черпать пополнение и расширение своих математических сведений.

Подобно этому желательно издание математической литературы, в частности математического журнала, для учащихся. В среде учеников каждой школы всегда имеется немало лиц, способных к математике и интересующихся ею, но отсутствие у нас каких бы то ни было математических книг, кроме стабильных пособий, не дает выхода этому интересу. Полезным было бы устройство при школах математических кружков, наподобие имеющихся уже драматических, шахматных, физкультурных и иных. В высшей степени желательно устройство местных и районных соревнований, подобных организованной ЛГУ олимпиаде, которые способствуют поднятию интереса к математике в широких кругах преподавателей и учащихся. Заметим, что соревнования подобного рода под именем конкурсов издавна существуют во Франции, где они играют существенную роль в отношении своевременного выявления наиболее одаренной молодежи и общего повышения уровня математического образования.

В заключение своего доклада, который кроме приведенных содержит много и иных разумных и ценных пожеланий относительно улучшения постановки у нас преподавания математики, комиссия правильно указывает, что ошибки и недочеты в постановке преподавания математики медленнее и труднее поддаются исправлению, чем пробелы в работе по другим областям, и имеют весьма важное народнохозяйственное значение. Необходимо помнить, что работа школы есть работа над будущим советской культуры, науки, техники и народного хозяйства. Особенно большое значение проблема работы школы имеет для нормального комплектования и через это для нормальной деятельности советских техникумов, вузов и в особенности для университетов.

В общем, все изложенное показывает большое значение проведенной ЛГУ математической олимпиады, и нельзя не быть благодарным комиссии, которая ее устроила и подвергла всесторонней обработке ее результаты.

И. Чистяков

Задачи

1. Решите систему уравнений:

$$x^2 = a + (y-z)^2,$$
$$y^2 = b + (z-x)^2,$$
$$z^2 = c + (x-y)^2.$$

2. Докажите, что уравнение

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$$

при вещественных a, b и c не имеет комплексных корней.

3. Найдите предел величины

$$\left(\cos\frac{a}{x}\right)^x,$$

когда x неограниченно возрастает, принимая последовательно целые значения $x = 1, 2, 3, \ldots$ до бесконечности.

4. Докажите, что расстояние произвольной точки окружности от хорды есть среднее пропорциональное между расстояниями от той же точки до касательных, проведенных в концах этой хорды.

5. Найдите

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(a+x)-\operatorname{tg}(a-x)}{\operatorname{arctg}(a+x)-\operatorname{arctg}(a-x)}.$$

6. Докажите, что

$$\frac{n}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!} + \ldots + \frac{n+p}{(n+p+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+p+1)!}.$$

7. Исключите θ и φ из уравнений:

$$a\sin^2\theta + b\cos^2\theta = m,$$
$$b\sin^2\varphi + a\cos^2\varphi = n,$$
$$a\operatorname{tg}\theta = b\operatorname{tg}\varphi.$$

8. Покажите, что если a, b, c — стороны треугольника, то корни уравнения

$$b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$$

будут мнимые.

9. Докажите, что прямые, соединяющие вершины треугольной пирамиды с центрами тяжести противоположных граней, пересекаются в одной точке.

10. Покажите, что если α и β — корни уравнения

$$x^2 + px + 1 = 0,$$

а γ и δ — корни уравнения

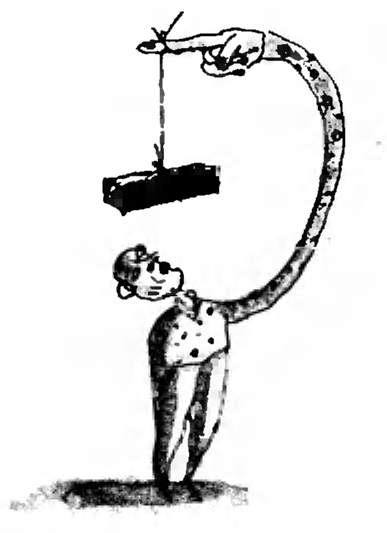
$$x^2 + qx + 1 = 0,$$

то

$$(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta) = q^2 - p^2.$$

11. Пересеките данную трехгранную пирамиду плоскостью так, чтобы в сечении получился ромб.

«КВАНТ» УЛЫБАЕТСЯ



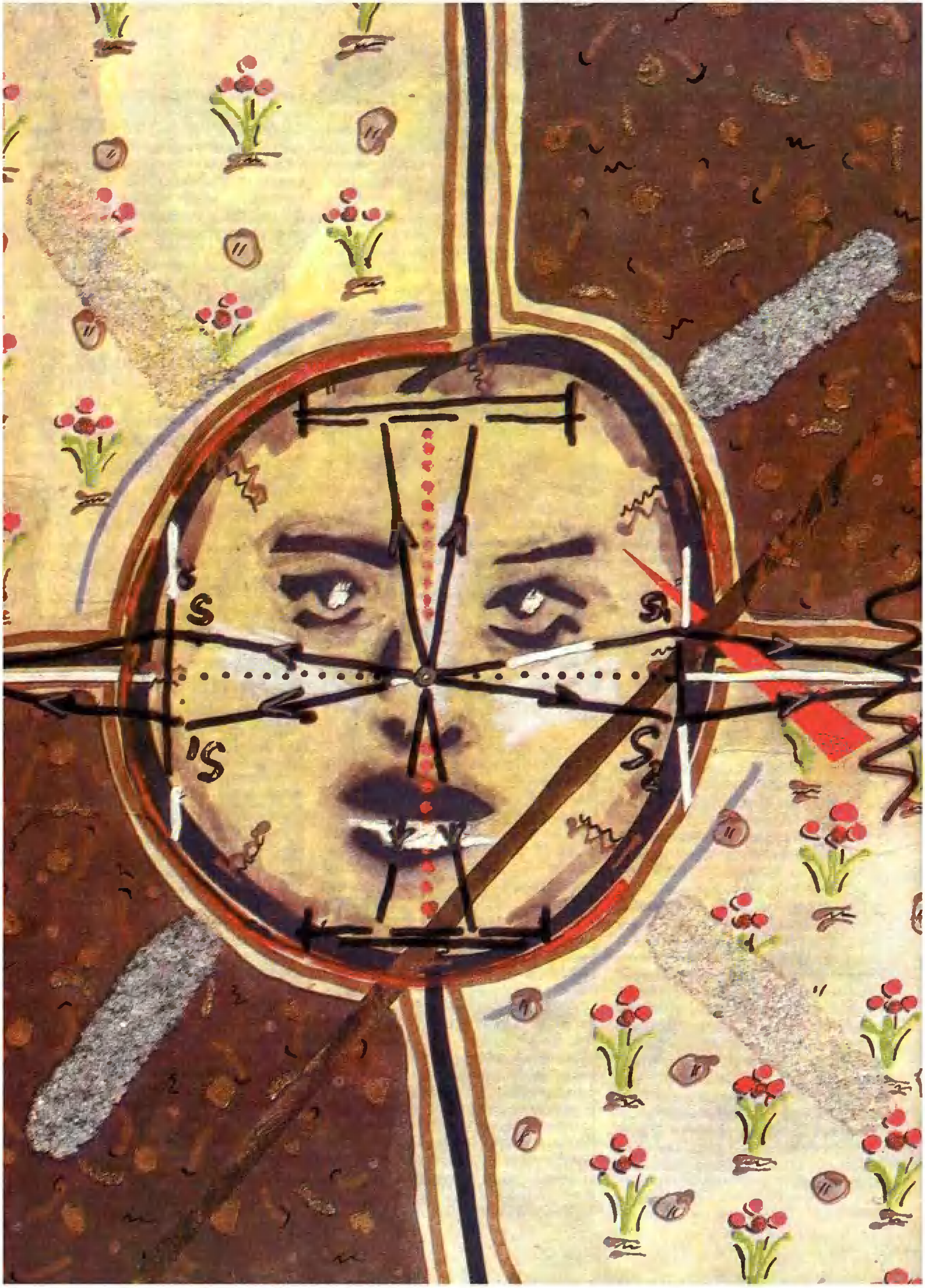
Кто вы: физик или математик?

Мартин Гарднер предложил следующую задачу. Представьте себе, что вы заперты в комнате, где (так же, как и на вас самих) нет ничего металлического, кроме двух совершенно одинаковых с виду железных брусков. Один из брусков намагничен. Установить, какой именно, можно, подвесив каждый из брусков на нити, обвязанной вокруг середины бруска: намагниченный брусок будет вести себя как стрелка компаса, то есть указывать на север. Нельзя ли установить, какой из брусков намагничен, более простым способом?

Приведенное в книге Гарднера решение состояло в том, чтобы дотронуться концом одного бруска до середины другого. Если вы почувствуете притяжение, то брусок, которым вы дотрагивались, намагничен. Если притяжения не возникает, то в руках у вас находится ненамагниченный брусок.

Это «физическое» решение вполне разумно. Осуществить его «экспериментально» проще, чем подвешивать оба бруска на нитях. Будучи все-таки логиком, а не физиком, я придумал еще одно решение, занимающее по своей простоте промежуточное положение между «физическим» и «лобовым». Я предлагаю взять один брусок, обвязать его нитью посредине и, подвесив на нити, посмотреть, будет ли он указывать на север.

Из книги Р. Смаллиана «Как же называется эта книга?» (М.: Мир, 1981)



Немного о волновой оптике

Г. ЛОКШИН

В последнее время на приемных экзаменах по физике в различных вузах все чаще предлагаются задачи по волновой оптике. Прежде чем приступить непосредственно к разбору задач по этому разделу физики, обсудим некоторые основные положения теории волн.

Волна — это процесс переноса в пространстве колебаний. Рассмотрим такой пример. Пусть в некоторой плоскости $z = 0$, и, в частности, в точке P_0 этой плоскости (рис. 1), возбуждены гармонические колебания, например электрического поля:

$$E_0(t) = a\cos\omega t,$$

где ω — частота колебаний, a — амплитуда.

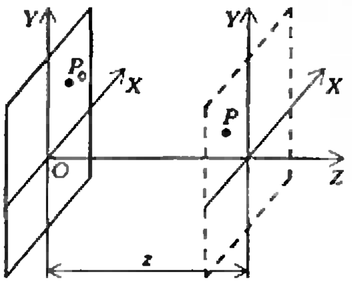


Рис. 1

Возникшая при этом электромагнитная волна, распространяясь в пространстве со скоростью v, в некоторый момент достигнет плоскости z = const, отстоящей на расстоянии z от источника, и создаст в ней (в любой точке P этой плоскости) колебания $E(z, t)$, сдвинутые во времени (запаздывающие) на величину $\tau = z/v$:

$$E(z,t) = a\cos(\omega(t-\tau)) =$$

$$= a\cos\left(\omega t - \frac{\omega z}{v}\right) =$$

$$= a\cos(\omega t - kz). \quad (1)$$

Аргумент косинуса $\omega t - kz$ называется фазой волны, а величина $k = \omega/v$ — волновым числом. Говорят, что колебания в точке P отстают по фазе от колебаний в точке P_0 на величину

$$\Delta\varphi = k\Delta z, \quad (2)$$

которую называют разностью фаз колебаний.

Формула (1) описывает плоскую монохроматическую волну, бегущую вдоль оси Z, поскольку фазы колебаний всех точек плоскости z = const в любой момент одинаковы. Иными словами, колебания всех ее точек происходят синфазно, в такт.

Поверхность, на которой происходят синфазные колебания, называется волновой поверхностью (употребляется также термин — волновой фронт). В данном случае волновые поверхности — плоскости (отсюда и название — плоская волна). Практически волну можно считать плоской, если источник колебаний находится очень далеко от области наблюдения. Только о таких волнах и пойдет речь в этой статье.

Расстояние между ближайшими волновыми поверхностями, на которых колебания происходят со сдвигом фаз 2π, т.е. фактически синфазно, называется длиной волны λ. Из соотношения (2) получаем

$$\Delta\varphi = \frac{\omega}{v}\lambda = 2\pi,$$

и

$$\lambda = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{2\pi}{k}. \quad (3)$$

Согласно формуле (1), на волновых поверхностях, разделенных расстоянием λ, величина E одинакова в любой момент времени.

И последнее. Скорость света в среде v связана со скоростью в вакууме c соотношением $v = c/n$, поэтому длина волны в среде λ связана с длиной волны в вакууме λ_0 формулой

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega n} = \frac{\lambda_0}{n}, \quad (4)$$

где n — абсолютный показатель преломления среды.

А теперь — несколько конкретных задач.

Задача 1. *Плоская электромагнитная волна (λ_0 = 1 см) бежит в вакууме вдоль оси Z. Найдите разность фаз колебаний в точках P_0 (x = 1 см; z = = 5 см) и P (x = 3 см; z = 7,5 см).*

Разность фаз зависит только от расстояния между волновыми поверхностями, в которых лежат точки P_0 и P (и не зависит от x-координат точек P_0 и P). В нашем случае

$$\Delta\varphi = k\Delta z = \frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta z = 5\pi,$$

т.е. колебания в точках P_0 и P происходят в противофазе.

Задача 2. *Как изменится результат предыдущей задачи, если та же волна (λ_0 = 1 см) бежит в среде с показателем преломления n = 1,5?*

Используя соотношение (4), находим

$$\Delta\varphi = k\Delta z = \frac{2\pi}{\lambda_0/n}\Delta z = \frac{15}{2}\pi.$$

Еще раз обратите внимание на важную формулу (2): разность фаз колебаний вычисляется как произведение волнового числа $k = 2\pi/\lambda$ на расстояние между волновыми поверхностями, в которых лежат интересующие нас точки наблюдения.

Задача 3. *Плоская монохроматическая волна бежит в направлении оси Z_1, составляющей угол β с осью Z. Какова разность фаз колебаний в двух точках любой плоскости z = const, расстояние между которыми равно x?*

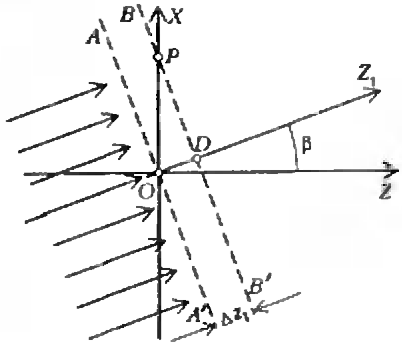


Рис. 2

На рисунке 2 изображена плоскость z = const (перпендикулярная оси Z) и две волновые поверхности: AA', в которой лежит точка O, и BB', в которой находится точка P ($OP = x$). Расстояние между поверхностями $OD = \Delta z_1$.

Пусть колебания на волновой поверхности AA' (и в точке O этой поверхности) происходят по закону

$$E(t) = a\cos\omega t.$$

Тогда на поверхности BB' (и в частности, в точках D и P) колебания отстают по фазе на величину

$$\Delta\varphi = k\Delta z_1 = k\cdot OP\cdot\sin\beta = kx\sin\beta.$$

Таким образом, разность фаз колебаний в двух точках плоскости z = const зависит от расстояния между точками по линейному закону

$$\Delta\varphi(x) = (k\sin\beta)x.$$

Запомните этот результат.

Линейный закон изменения фазы колебания по некоторой плоскости $z = \text{const}$ означает, что имеется плоская волна, направление распространения которой составляет угол β с осью Z, перпендикулярной этой плоскости.

Задача 4. *Плоская световая волна (длина волны λ_0) падает нормально на тонкую прозрачную пластинку толщиной d (рис. 3). Показатель преломления пластинки меняется вдоль координаты x по закону $n(x) = n_0(1 + x/b)$. Найдите распределение фазы колебаний $\varphi(x)$ на выходе из пластинки. В каком направлении будет распространяться волна за пластинкой?*

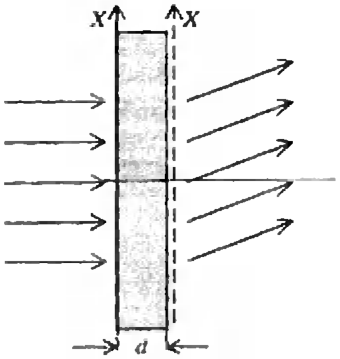


Рис. 3

Пусть в плоскости, примыкающей к пластинке слева, падающая волна создает колебания

$$E_0 = a\cos\omega t .$$

Время распространения волны через пластинку в разных местах различно и равно

$$\tau(x) = \frac{d}{v(x)} = \frac{d}{c}n(x).$$

Тогда на выходе из пластинки (в плоскости, примыкающей к ней справа) получаем

$$E(t) = a\cos\omega(t-\tau) = a\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}n(x)d\right),$$

или

$$E(t) = a\cos(\omega t - k_0 n(x)d),$$

где $k_0 = \omega/c$ — волновое число в вакууме.

Распределение фазы колебаний на выходе из пластинки есть

$$\varphi(x) = k_0 d n(x).$$

Подставляя функцию $n(x) = n_0(1 + x/b)$, находим

$$\varphi(x) = \varphi_0 + k_0 n_0 \frac{d}{b}x,$$

где $\varphi_0 = k_0 n_0 d$ — константа. Мы получили линейный закон изменения фазы колебаний в плоскости, примыкающей к пластинке справа. В соответствии с результатами предыдущей задачи, это означает, что, пройдя через пластинку, волновой фронт повернулся (как показано на рисунке) на угол

$$\beta = \arcsin\frac{n_0 d}{b}.$$

Направление распространения составляет угол β с осью Z — наша пластинка эквивалентна призме.

Одно из интереснейших волновых явлений — интерференция. В простейшим случае это явление возникает при наложении двух волн одной и той же частоты.

Согласно принципу суперпозиции, результирующий колебательный процесс $E(t)$ в любой точке наблюдения представляет собой сумму колебаний $E_1(t)$ и $E_2(t)$, созданных в этой точке каждой из волн в отдельности:

$$E(t) = E_1(t) + E_2(t).$$

В некоторых точках пространства колебания E_1 и E_2 оказываются синфазными и усиливают друг друга — амплитуда результирующего колебания равна сумме амплитуд слагаемых волн. В других точках волны оказываются в противофазе и гасят друг друга — амплитуда результирующего колебания равна разности амплитуд двух волн. В результате в пространстве возникают чередующиеся области максимальной и минимальной амплитуд результирующего колебания — чередующиеся светлые и темные участки. Это явление и называется интерференцией.

При решении любой задачи интерференции, как правило, нужно найти сумму двух колебаний $E_1 = a_1\cos(\omega t - \varphi_1)$ и $E_2 = a_2\cos(\omega t - \varphi_2)$ (φ_1 и φ_2 — начальные фазы колебаний). Для этого удобно воспользоваться геометрической моделью колебательного движения.

Изобразим первое колебание с помощью вектора $\vec{E}_1$, длина которого равна амплитуде колебаний a_1, а угол наклона относительно горизонтальной оси равен начальной фазе φ_1 (рис. 4). Аналогично, второе колебание изобразим вектором $\vec{E}_2$ длиной a_2 с углом наклона φ_2. Представьте себе, что оба вектора вращаются против часовой стрелки с частотой ω, а на рисунке зафиксировано их положение в начальный момент времени $t = 0$. Очевидно, что при таком вращении проекции векторов на ось X изменяются в соответствии с законами $E_1(t)$ и $E_2(t)$, а сумма $a_1\cos(\omega t - \varphi_1) + a_2\cos(\omega t - \varphi_2)$ представляет собой проекцию суммарного вращающегося вектора $\vec{E}$. Длина этого вектора a есть не что иное, как амплитуда суммарного колебания. Используя теорему косинусов, находим

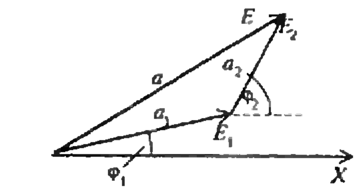


Рис. 4

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos\Delta\varphi,$$

где $\Delta\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ — разность фаз складываемых колебаний.

Следует отметить, что в оптическом диапазоне частот ($\omega \sim 10^{15}$ Гц) измеряемой величиной является интенсивность света I, пропорциональная квадрату амплитуды колебаний. Тогда предыдущую формулу можно переписать в виде

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\Delta\varphi .$$

Отсюда видно, что интенсивность суммарной волны в общем случае не равна сумме интенсивностей слагаемых волн. Максимум суммарной интенсивности достигается в тех точках, где $\Delta\varphi = 2\pi m$ (m — целое число):

$$I_{max} = (a_1 + a_2)^2,$$

а минимальная — в точках, где $\Delta\varphi = 2\pi(m \pm 1/2)$:

$$I_{min} = (a_1 - a_2)^2 .$$

Рассмотрим две конкретные задачи.

Задача 5. *Две монохроматические волны одинаковой амплитуды (длина волны λ) падают на плоский экран, как показано на рисунке 5. Угол между сходящимися пучками света равен 2α. Найдите распределение интенсивности света на экране и ширину интерференционных полос, т.е. расстояние между двумя соседними светлыми полосами.*

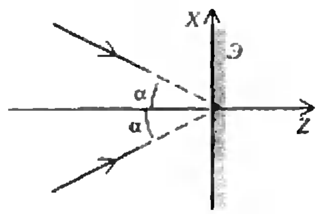


Рис. 5

Воспользуемся результатами решения задачи 3. Распределение фазы колебаний, создаваемых волной 1 на экране, запишем в виде $\varphi_1 = kx\sin\alpha$, а волной 2 — в виде $\varphi_2 = -kx\sin\alpha$. Тогда разность фаз колебаний равна

$$\Delta\varphi = 2kx\sin\alpha ,$$

а интенсивность —

$$I = 2I_0\left(1 + \cos(2k\sin\alpha \cdot x)\right).$$

График функции $I = I(x)$ изображен на рисунке 6.

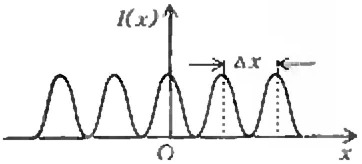


Рис. 6

Максимальной интенсивности соответствует условие $\cos(2kx\sin\alpha) = 1$, откуда

$$2kx\sin\alpha = 2\pi m,$$

и

$$x_{\max} = \frac{\pi m}{k\sin\alpha}.$$

При этом ширина интерференционной полосы равна

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2\sin\alpha}.$$

Для малых углов схождения 2α можно записать

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2\alpha}.$$

Важно подчеркнуть, что интерференция возникает лишь при наложении когерентных волн. (В частности, такими волнами являются строго монохроматические волны, в которых поле изменяется со временем по гармоническому закону $E(t) = a\cos\omega t$.) Только в этом случае возникает стационарная, устойчивая картина интерференционных полос. В оптическом диапазоне когерентные волны невозможно получить от двух независимых источников. Здесь всегда используется один источник света, а две когерентные волны получаются с помощью различных схем, дающих изображение этого источника. Вот – пример.

Задача 6 (Опыт Юнга). *Точечный монохроматический источник света S ($\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см) освещает непрозрачный экран с двумя маленькими отверстиями S_1 и S_2, расстояние между которыми d = 1 см. (рис. 7). Интерференционная картина возникает в плоскости наблюдения Э, находящейся от экрана с отверстиями на расстоянии h = 2 м. Определите ширину интерференционной полосы.*

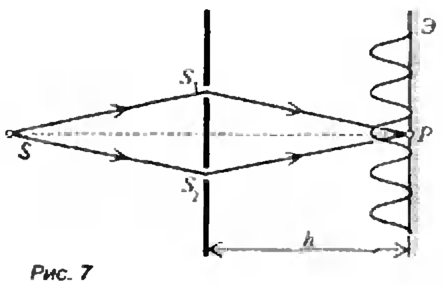


Рис. 7

В этом случае интерферируют волны, прошедшие через отверстия S_1 и S_2, которые можно рассматривать как два когерентных источника. Угол схождения волн в плоскости наблюдения равен

$$\alpha = \frac{d}{h} = 0{,}005.$$

Он мал, поэтому, используя результаты решения задачи 5, для ширины интерференционной полосы находим

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{\lambda}{d}h = 10^{-2}\ \text{см}.$$

Упражнения

1. Плоская электромагнитная волна с амплитудой a_0 и частотой ω, сформированная рупорной антенной, падает перпендикулярно на плоский отражающий экран. Определите амплитуду отраженной волны, если измеритель напряженности электрического поля при перемещении между экраном и рупором зафиксировал максимальную амплитуду поля a_1 и минимальную a_2. Определите расстояние между двумя соседними максимумами при перемещении измерителя.

2. Интерферометр Рэлея используется для точного измерения показателей преломления газов. Для этого на пути одного из интерферирующих лучей ставится кювета прямоугольной формы и длиной $L = 10$ см с исследуемым газом, а на пути другого – компенсатор, с помощью которого добиваются, чтобы в центральном максимуме разность хода между лучами равнялась нулю. Чему равен показатель преломления газообразного азота, если после замены в кювете воздуха на азот интерференционная картина в плоскости наблюдения сместилась ровно на одну полосу в сторону (что соответствовало увеличению показателя преломления)? Показатель преломления воздуха $n_в = 1{,}000292$. Измерения проводились на длине волны света $\lambda = 500$ нм.

3. С целью уменьшения доли отраженного света от поверхности стекла на нее наносят тонкую пленку, показатель преломления которой меньше показателя преломления стекла (просветление оптики). Пучок белого света с длинами волн от 400 нм до 700 нм падает нормально на нанесенную на стекло пленку. Показатель преломления пленки $n = 4/3$, ее толщина $h = 600$ нм. На каких длинах волн отраженный свет максимально ослабляется?

4. Приемник радиосигналов, наблюдающий за появлением спутника Земли из-за горизонта, расположен на берегу озера на высоте $h = 30$ м над поверхностью воды. По мере поднятия спутника над горизонтом наблюдаются периодические изменения интенсивности принимаемого радиосигнала. Определите частоту радиосигнала спутника, если максимумы интенсивности наблюдались при углах возвышения спутника над горизонтом $\alpha_1 = 3°$ и $\alpha_2 = 6°$. Поверхность озера можно считать идеально отражающим зеркалом.

5. Точечный источник света S равномерно движется параллельно плоскости, в которой имеются два маленьких отверстия на расстоянии d друг от друга (см. рис. 7). Расстояние от него до плоскости равно L. Приемник света P, расположенный на оси системы, регистрирует периодически изменяющуюся освещенность. Определите скорость движения источника, если частота колебаний интенсивности $f = 15$ Гц, длина волны света $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ м, $d = 2$ мм, $L = 1$ м. Во время измерения источник движется вблизи оси системы.

«КВАНТ» УЛЫБАЕТСЯ

Истории о вермонтцах

Человек проходит мимо дома вермонтского фермера. Хозяин сидит на крыльце в кресле-качалке и невозмутимо покачивается. Прохожий замечает: «Так и качаетесь всю жизнь?» На что хозяин дома отвечает: «Пока еще не всю».

Из историй о вермонтцах мне особенно нравится рассказ о туристе, путешествовавшем по Вермонту. Однажды он оказался на развилке. У обочины одной дороги стоял указатель «К устью реки Белой». У обочины другой дороги тоже стоял указатель «К устью реки Белой». Турист задумчиво почесал в затылке и спросил у стоявшего неподалеку вермонтца: «Если обе дороги ведут к устью реки Белой, то не все ли равно, по какой дороге мне идти?» «Мне все равно», — ответил вермонтец.

Из книги Р. Смаллиана «Как же называется эта книга?» (М.: Мир, 1981)

Варианты вступительных экзаменов

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический факультет, пробный экзамен — май 1993 г.)

1. Решите неравенство

$$\left(\sqrt[3]{7}\right)^{35x} > \frac{1}{7}7^{|4x^2-12x-1|}.$$

2. Сумма первых 7 членов геометрической прогрессии равна ее первому члену, умноженному на 7, а сумма первого, восьмого и пятнадцатого членов равна 15. Найдите сумму первых 21 членов этой прогрессии.

3. В равнобокой трапеции диагональ имеет длину 8 и является биссектрисой одного из углов. Может ли одно из оснований этой трапеции быть меньше 4, если другое равно 5?

4. При каких значениях a, принадлежащих интервалу $(-\pi/2;\ \pi/2)$, уравнение

$$\sqrt{2\sin(x-a)+\sqrt{3}} = \cos 6x - 1$$

имеет решения?

5. На диагоналях AB' и BC' граней параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ взяты точки M и N так, что отрезки MN и $A'C$ параллельны. Найдите отношение длин этих отрезков.

6. Найдите все значения a, для которых неравенство

$$\log_5\left(a\cos 2x + \left(1+a^2-\sin^2 x\right)\cos x + 4 + a\right) \le 1$$

выполняется при всех x.

Вариант 2

(механико-математический факультет, основной экзамен)

1. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt[3]{7}}{\log_{x-1}17} \ge \frac{\log_{17}(x-1)}{\log_{291}17}.$$

2. Найдите все значения b, при которых уравнение

$$9^x + \left(b^2+6\right)3^x - b^2 + 16 = 0$$

не имеет решения.

3. Решите систему

$$\begin{cases} (\sin y - \cos x + 1)\left(\operatorname{tg}^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{tg}^2\left(y+\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 0, \\ (\cos x + \sin y)(2 + \sin 2y + \cos y) = 0. \end{cases}$$

4. В треугольнике PQR медиана, проведенная из вершины Q, имеет длину $3\sqrt{21}/4$. Окружности с центрами в вершинах P и R и радиусами 5 и 1 соответственно касаются друг друга, а вершина Q лежит на прямой, касающейся каждой из окружностей. Найдите площадь S треугольника PQR, если известно, что $S<7$.

5. Точки P, Q, R и S расположены в пространстве так, что середины отрезков SQ и PR лежат на сфере с радиусом a, а отрезки PS, PQ, QR и SR делятся сферой на три части в отношении 1:2:1 каждый. Найдите расстояние от точки P до прямой QR.

6. Из пункта A в пункт B с постоянными скоростями выехали два мотоциклиста, а из B в A одновременно с ними выехал третий мотоциклист с постоянной скоростью 80 км/ч. Через 40 минут расстояние между первым и вторым было в два раза меньше, чем между первым и третьим. Через 1 час после старта расстояние между первым и вторым было равно расстоянию между первым и третьим, а также было равно половине расстояния, которое осталось проехать третьему до A. Через 1 час 20 минут после старта расстояние между первым и вторым было равно $2/5$ расстояния между первым и третьим. Найдите расстояние между пунктами A и B.

Вариант 3

(факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Решите неравенство

$$\log_{\sqrt{8-2\sqrt{7}}+1-\sqrt{3}}\left(4x-x^2-2\right) \ge 0.$$

2. На отрезке $0 \le x \le \pi$ найдите все значения x, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{1+2\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x}.$$

3. Решите неравенство

$$\left|3^x - 4\right| + \left|x^2 - 4x + 3\right| \le 3^x + 4x - x^2 - 7.$$

4. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC точка D делит сторону BC в отношении 2:1, считая от вершины B, а точка E — середина стороны AB. Известно, что медиана CQ треугольника CED равна $\sqrt{23}/2$, а $DE=\sqrt{23}/2$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

5. Точка $M(x;y)$, декартовы координаты которой удовлетворяют условиям

$$a^2x - y = 2a^2 - 2b,$$
$$x - by = 2 - 2a^2,$$

лежит на прямой $y=2-x$. При каких a и b эта точка наиболее близко расположена к точке $N(3;-1)$?

6. Найдите все значения a, при которых область определения функции

$$y = \frac{1}{3\cos x - 2\cos^3 x - \sqrt{2a}}$$

совпадает с областью определения функции

$$y = \frac{1}{\sin^3 x + \cos^3 x - a} - \frac{\sqrt{2}}{3\cos x - 2\cos^3 x - \sqrt{2a}}.$$

Вариант 4

(физический факультет, пробный экзамен — май 1993 г.)

1. Решите неравенство

$$x^3 < x.$$

2. Решите уравнение

$$8\sin^2\frac{x}{2} + 3\sin x - 4 = 0.$$

3. Решите уравнение

$$2^{x+1} = 2^{2x-4}\cdot 3^{x-3}.$$

4. В трапеции средняя линия, равная 20, делит площадь трапеции в отношении 3:5. Найдите основания трапеции.

5. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{\log_{1/2}\frac{x-1}{3x-5}}.$$

6. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB=BC$) проведена биссектриса AD. Известно, что $BC/DC=k$. Найдите отношение длины отрезка DC к радиусу окружности, описанной около треугольника ADC.

7. Для любого a решите уравнение
$$2|x|+|x-1|=a.$$
8. В треугольной пирамиде $SABC$ все плоские углы при вершине S прямые, SO — высота пирамиды. Известно, что отношение площади треугольника AOB к площади треугольника BOC равно k. Найдите отношение площади треугольника ASB к площади треугольника BSC.

Вариант 5

(физический факультет, основной экзамен)

1. Решите неравенство
$$\frac{2x-1}{2^x-1}<0.$$
2. Решите уравнение
$$\cos 5x=\cos(5+x).$$
3. Решите уравнение
$$\sqrt{\log_2 x}=2\log_2\sqrt{x}-1.$$
4. В окружность с радиусом R вписан равнобедренный треугольник ABC ($AB=BC$) с углом BAC, равным α. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.
5. Решите неравенство
$$\frac{|x+3|+x}{x+2}>1.$$
6. Окружность касается сторон угла с вершиной O в точках A и B. На этой окружности внутри треугольника AOB взята точка C. Расстояния от точки C до прямых OA и OB равны соответственно a и b. Найдите расстояние от точки C до хорды AB.
7. Число $x=3$ — один из корней уравнения $ax^2+bx+2=0$, где $a<0$. Найдите действительные корни уравнения $ax^4+bx^2+2=0$.
8. На плоскости лежат два шара с радиусами r и цилиндр с радиусом R ($R>r$). Шары касаются друг друга и боковой поверхности цилиндра. Цилиндр касается плоскости по своей образующей. Найдите радиус шара, большего, чем данные, касающегося обоих данных шаров, цилиндра и плоскости.

Вариант 6

(химический факультет)

1. Решите неравенство
$$\frac{9}{(x+1)^2}\geq 1.$$
2. Решите уравнение
$$(\log_3 x)^2+4\log_{1/3}x+3=0.$$
3. Решите тригонометрическое уравнение
$$\sin x=1-\cos 2x.$$
4. В квадрат площадью 24 вписан прямоугольник так, что на каждой стороне квадрата лежит одна вершина прямоугольника. Длины сторон прямоугольника относятся как 1:3. Найдите площадь прямоугольника.
5. Найдите число решений уравнения
$$2^{x+2}+2^{-x}=4+2x-x^2$$
и обоснуйте ответ.

Вариант 7

(биологический факультет)

1. Решите уравнение
$$\cos 2x+6\sin x-5=0.$$
2. Решите уравнение
$$2\log_4\left(4^x-2^{x+1}-2\right)=1+\log_2\left(2^{x+1}-5\right).$$
3. Решите неравенство
$$6\sqrt{\frac{2x-1}{x}}\geq\frac{10x-1}{x}.$$
4. Даны две различные геометрические прогрессии, первые члены которых равны 1, а сумма знаменателей равна -4. Известно, что сумма шестых членов прогрессий равна -724. Найдите сумму пятых членов прогрессий.
5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длина отрезка, соединяющего середины сторон AB и CD, равна единице. Если стороны BC и AD продолжить до их пересечения, то угол, образованный этими прямыми, будет равен 90°. Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей.
6. Найдите решения системы
$$\begin{cases}(2-x)(3x-2z)=3-z,\\ y^3+3y^2=x^2-3x+2,\\ z^2+y^2=6y,\end{cases}$$
удовлетворяющие условию $z\geq 0$.

Вариант 8

(факультет почвоведения)

1. В совхозе 2/5 всей пахотной земли засеваются озимой пшеницей, 1/3 — яровой пшеницей, 1/7 — рожью, а оставшиеся 780 га — кукурузой. Сколько га пахотной земли имеет совхоз?
2. Решите уравнение
$$\sin^3 x+\cos^3 x+\sin x+\cos x=0.$$
3. Решите неравенство
$$\log_{4x^2+1}65>1.$$
4. Через точку O пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основанию. Определите длину отрезка этой прямой между боковыми сторонами трапеции, если средняя линия трапеции равна 4/3, а точка O делит диагональ трапеции на части, отношение которых равно 1/3.
5. Найдите все действительные числа a, при которых неравенство
$$x+\frac{7a^2-a-2}{x-a}<-7a$$
не имеет решений x, больших 1.

Вариант 9

(географический факультет)

1. Решите уравнение
$$\sqrt{5x+21}=3+x.$$
2. Решите уравнение
$$\sin^2 x+2\log_2\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}\right)=-\cos x.$$
3. Найдите область определения функции
$$y=\sqrt{\frac{2x-x^2-1}{x^2+3x+2}}.$$
4. В треугольник со сторонами $AB=8$, $BC=6$, $AC=4$ вписана окружность. Найдите длину отрезка DE, где D и E — точки касания этой окружности со сторонами AB и AC соответственно.
5. При каких значениях параметра a четыре корня уравнения
$$x^4+(a-3)x^2+(a+10)^2=0$$
являются последовательными членами арифметической прогрессии?

Вариант 10

(геологический факультет)

1. Найдите численное значение выражения
$$\left(\frac{8a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{4\sqrt{a}+2\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\left(\frac{4\sqrt{a}+2\sqrt{b}}{4a-b}\right)^2.$$
2. Решите уравнение
$$\sqrt{1-\cos^2 x}+6\cos 2x=0.$$

3. Для рытья котлована выделили два экскаватора. После того, как первый проработал 2 часа, его сменил второй, который за 3 часа закончил работу. Всю работу один второй экскаватор выполнил бы на 4 часа быстрее, чем один первый экскаватор. За какое время выроют котлован оба экскаватора, работая вместе?

4. Решите неравенство

$$\frac{1}{2}\log_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{9}} x^2 \geq \log_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{9}} \sqrt{2x+3}.$$

5. На стороне AB треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AC и BC в точках D и E соответственно. Прямая DE делит площадь треугольника ABC пополам и образует с прямой AB угол 15°. Найдите углы треугольника ABC.

6. Найдите действительные значения параметра k, при которых ровно одна точка графика функции

$$y = 2x + (\lg k)\sqrt{\cos 2k\pi x + 2\cos k\pi x - 3} + 1$$

лежит в области $(2x-7)^2 + 4(y-3)^2 \leq 25$.

Вариант 11

(экономический факультет)

1. Решите неравенство

$$\log_{x^2-6} 25 < 2.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\sin 3x}{\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)} = 1.$$

3. Решите неравенство

$$3\sqrt{x+2} \leq 6 - |x-2|.$$

4. Найдите периметр плоской фигуры, заданной на координатной плоскости условиями

$$\begin{cases} 2|x+2|\arcsin(y-1)^2 \leq \pi(x+2), \\ 2|y-1| - x \geq 0. \end{cases}$$

5. За время хранения вклада в банке проценты по нему начислялись ежемесячно сначала в размере 5% в месяц, затем $11\frac{1}{9}$%, потом $7\frac{1}{7}$% и, наконец, 12% в месяц. Известно, что под действием каждой новой процентной ставки вклад находился целое число месяцев, а по истечении срока хранения первоначальная сумма вклада увеличилась на 180%. Определите срок хранения вклада.

6. Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 5, 12 и 13. Найдите площадь треугольника.

Вариант 12

(факультет психологии)

1. Решите уравнение

$$2^{\frac{3x-1}{2x+1}} - 1 = 2^{\frac{2-x}{2x+1}}.$$

2. Решите неравенство

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x} > \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

3. Найдите все решения уравнения

$$3\sin 5x + \sqrt{2}\sin^2\left(x + \frac{\pi}{20}\right) = 3\cos 5x - 3\sqrt{2}$$

на отрезке $[-2\pi; 2\pi]$.

4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты CH и AH_1. Известно, что $AC = 2$, площадь круга, описанного около ΔHBH_1, равна $\pi/3$. Найдите угол между высотой CH и стороной BC.

5. Уравнение $(a-1)x^2 - (a+1)x + 2a - 1 = 0$ имеет действительные корни x_1 и x_2.

а) Найдите все значения параметра a, при которых оба корня меньше единицы.

б) При $a \neq 1$ найдите все значения параметра b, при которых выражение $(x_1 - b)(x_2 - b)$ не зависит от параметра a.

Вариант 13

(Институт стран Азии и Африки)

1. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2 - 3x + 3}}{2 - x} \geq 1.$$

2. Сумма второго и шестого членов арифметической прогрессии равна 6. Найдите сумму первых семи членов этой прогрессии.

3. В треугольнике ABC угол BAC равен 30°, $AB = BC$. На стороне AB как на диаметре построена окружность, пересекающая сторону AC в точке D. Найдите расстояние от вершины C до центра этой окружности, если $CD = 1$.

4. Решите уравнение

$$\log_x(4x-3) - 2 = \sqrt{\log_x^2(4x-3) + 4\log_x \frac{x}{4x-3}}.$$

5. Решите уравнение $\sin^2 x + 2\sqrt{x}\cos x + 2\sqrt{x} = 0$.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$x^2 + 4|x - a| \geq a^2$$

справедливо для всех действительных x.

ФИЗИКА

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. Тонкостенный обруч может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр (рис.1). Радиус обруча R, масса M. К внутренней поверхности обруча прикреплен маленький шарик, масса которого m. Определите период малых колебаний обруча вблизи положения равновесия. Ускорение свободного падения равно g, спицы невесомы. Трение не учитывайте.

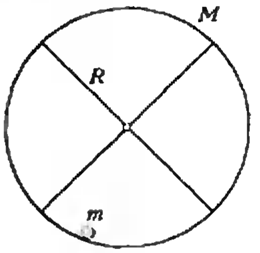


Рис. 1

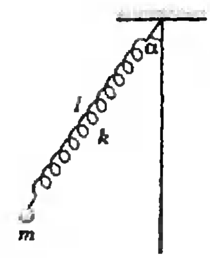


Рис. 2

2. На горизонтальной поверхности одна на другой лежат две одинаковые пластинки массой m каждая. Если к верхней пластинке приложить горизонтальную силу $F > F_0$, то она начнет двигаться относительно остающейся неподвижной нижней пластинки. Коэффициент трения скольжения нижней пластинки о горизонтальную поверхность μ. Найдите минимальную горизонтальную силу, которую надо приложить к нижней пластинке, чтобы в процессе движения верхняя пластинка с нее соскользнула.

3. Верхний конец невесомой пружины жесткостью k с начальной длиной l_0 закреплен, к нижнему концу прикреплен грузик массой m (рис.2). Пружину растянули до длины l, отклонили на угол α от вертикали, а затем грузик отпустили без начальной скорости. Какое количество теплоты выделится в этой системе после затухания всех колебаний? Ускорение свободного падения равно g.

4. Идеальный газ в количестве ν молей совершает работу в циклическом процессе, изображенном на рисунке 3. На участке *1 – 2* давление пропорционально объему, участок *2 – 3* представляет изохору, участок *3 – 1* – изобару. Определите работу, совершаемую газом за один цикл. Температуры в состояниях *1* и *2* равны соответственно T_1 и T_2.

5. Двигатель холодильника, работающего по циклу Карно,

имеет мощность $N = 0,6$ кВт. Оцените массу воды с начальной температурой $t_1 = 0\,^\circ C$, которая замерзнет за $\tau = 2$ ч работы холодильника, если радиатор холодильника имеет температуру $T = 373$ К. Удельная теплота плавления льда $\lambda =$ =334 Дж/г.

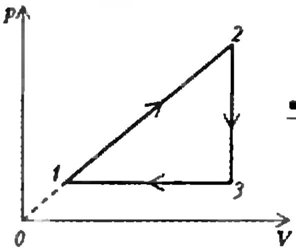


Рис.3

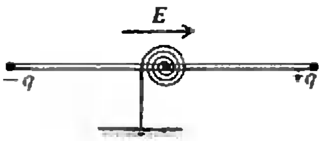


Рис.4

6. В однородном электрическом поле находится однородный непроводящий стержень длиной l с закрепленными на концах точечными зарядами $+q$ и $-q$ (рис. 4). Стержень может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его середину. К стержню прикреплена пружина. При отклонении стержня от исходного горизонтального положения на угол α на него действует момент упругих сил $M = k\alpha$. Напряженность электрического поля направлена горизонтально и перпендикулярно оси стержня. При каких значениях напряженности электрического поля будет существовать положение равновесия системы с углом α, не равным нулю?

7. Электрическая цепь состоит из источника постоянной ЭДС $\mathcal{E}$ и плоского конденсатора. В конденсатор вставлена диэлектрическая пластинка с относительной диэлектрической проницаемостью ε, заполняющая все пространство между пластинами. Сопротивление цепи имеет конечное значение. Какую работу нужно совершить, чтобы медленно вытянуть пластинку из конденсатора? Емкость конденсатора со вставленной в него пластинкой равна C. Трение не учитывайте.

8. Из двух кусков тонкой медной и свинцовой проволок, имеющих одинаковые длины и сечения, но различные сопротивления R_1 и R_2, изготовлено кольцо радиусом r. Оно помещено в однородное магнитное поле, индукция которого перпендикулярна плоскости кольца и изменяется во времени с постоянной скоростью $\Delta B/\Delta t$. Определите разность потенциалов между точками соединения разнородных проволок.

9. Тонкий параллельный пучок света падает на вертикальную стенку стеклянной кюветы, заполненной прозрачной жидкостью, и попадает в жидкость. Чему равен показатель преломления жидкости, если при любых углах падения свет испытывает полное отражение на верхней границе жидкости?

10. Плоская монохроматическая световая волна частично проходит через стеклянную призму Π с малым преломляющим углом α (рис. 5). Длина волны света λ, показатель преломления стекла n. На экране Э волны, прошедшие через призму и мимо нее, интерферируют. Найдите расстояние между соседними максимумами интерференционной картины.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. Система из двух шаров, массы которых $m_1 = 0,6$ кг и $m_2 =$ =0,3 кг, соединены невесомой спицей длиной $l = 0,5$ м и вращается вокруг оси, проходящей через центр тяжести и перпендикулярной спице, с угловой скоростью $\omega = 2$ рад/с. Найдите энергию системы.

2. Вес тела на экваторе некоторой планеты составляет $\eta =$ =97% от веса этого же тела на полюсе. Найдите период вращения планеты вокруг своей оси, если плотность вещества планеты $\rho = 2,5 \cdot 10^3$ кг/м^3. Планету считайте однородным шаром. Гравитационная постоянная $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ м$^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$.

3. Из пушки производится выстрел таким образом, что дальность полета снаряда в $\alpha = 2$ раза превышает максимальную высоту траектории. Считая известной величину начального импульса снаряда $p_0 = 1000$ кг · м/с, определите величину его импульса в верхней точке траектории. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

4. Откачанный до высокого вакуума сосуд объемом $V_1 = 9$ л подсоединен через трубку с краном к сосуду объемом $V_2 =$ = 1 л, содержащему идеальный газ при температуре $t = 27\,^\circ C$ и некотором давлении p. Определите это давление, если известно, что масса газа, перетекшего в первый сосуд после открывания крана, составляет $m = 10$ г. Молярная масса газа М = 20 г/моль, универсальная газовая постоянная $R =$ = 8 $\frac{1}{3}$ Дж/(моль · К).

5. Горизонтально расположенный цилиндр разделен подвижным поршнем массой $m = 5$ кг на две равные части объемом $V = 1$ л каждая. С одной стороны от поршня находится насыщенный водяной пар при температуре $t = 100\,^\circ C$, с другой — воздух при той же температуре. Цилиндр поставили вертикально так, что снизу оказался пар. На какое расстояние опустится поршень, если температуру в обеих частях цилиндра поддерживать неизменной? Площадь основания цилиндра $S = 0,01$ м^2, давление насыщенного пара при температуре t равно $p_н = 10^5$ Па, ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

6. Электрическая схема состоит из последовательно соединенных резистора сопротивлением $R = 10$ Ом, конденсатора и батареи с внутренним сопротивлением $r = 5$ Ом. Параллельно конденсатору подключили резистор сопротивлением $R_1 =$ = 5 Ом. Во сколько раз изменится энергия конденсатора после того, как напряжение на нем станет постоянным?

7. В схеме, показанной на рисунке 6, сопротивление $R_1 =$ = 1 Ом. Определите внутреннее сопротивление источника тока, если известно, что при замыкании ключа K сила тока через источник возрастает в $n = 3$ раза, а мощность, выделяющаяся во внешней цепи, увеличивается в $m = 2$ раза.

8. Собирающая линза дает на экране, перпендикулярном ее главной оптической оси, резкое изображение предмета с увеличением Г= 4. Линзу сдвигают перпендикулярно оптической оси на $h = 1$ мм. Какова будет величина смещения изображения на экране?

9. Узкий пучок световых лучей падает на стеклянный клин перпендикулярно его передней грани, расположенной вертикально (рис. 7). Пройдя клин, пучок попадает на вертикаль-

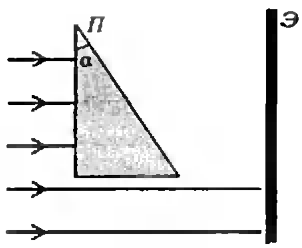


Рис.5

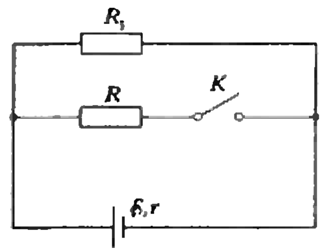


Рис.6

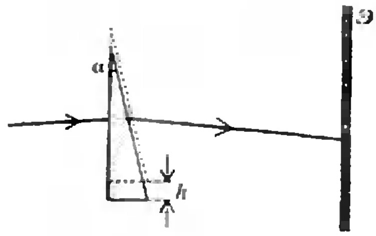


Рис.7

ный экран. На какое расстояние сместится световое пятно на экране, если сдвинуть клин вверх на $h = 5$ см? Показатель преломления материала клина $n = 1,5$, угол при его вершине $\alpha = 5,7°$. При расчетах положить $\mathrm{tg}\,\alpha \approx \sin\alpha \approx \alpha$.

10. Узкий световой пучок падает на рассеивающую линзу с фокусным расстоянием $F = 20$ см параллельно ее главной оптической оси. Пройдя линзу, пучок попадает на экран, расположенный на расстоянии $l = 30$ см от линзы перпендикулярно ее главной оптической оси. На какое расстояние сместится световое пятно на экране, если сдвинуть линзу перпендикулярно ее оси на $h = 2$ мм?

Химический факультет

1. Клин массой $M = 5$ кг может скользить по горизонтальной поверхности (рис. 8). На поверхности клина, образующей угол $\alpha = 45°$ с горизонтом, находится тело массой $m = 1$ кг. Какую силу следует приложить к клину в горизонтальном направлении, чтобы тело было неподвижным относительно клина? Трение не учитывайте, примите $g = 10$ м/с^2.

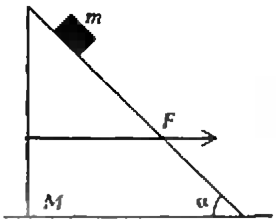


Рис.8

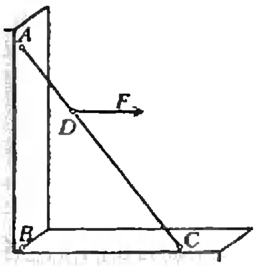


Рис.9

2. К лестнице AC, стоящей в углу комнаты, приложена горизонтальная сила F на расстоянии $AD = 1/3AC$ (рис. 9). При некотором значении этой силы лестница перестает опираться на стенку в точке A. Под каким углом к горизонтали направлена при этом сила, действующая на точку C со стороны пола? Лестница не скользит, $AB = 3$ м, $BC = 4$ м.

3. В вертикальном цилиндре под тяжелым поршнем находится газ. Если цилиндр перевернуть вверх дном, то концентрация молекул газа уменьшится в $k = 2$ раза. Определите массу поршня, считая газ идеальным. Площадь сечения цилиндра $S = 30$ см^2, атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, температура постоянна. Трение не учитывайте, примите $g = 10$ м/с^2.

4. В цилиндре под поршнем находится насыщенный водяной пар при давлении $p = 1,7$ кПа. Какая масса воды сконденсируется при изотермическом перемещении поршня, если при этом совершается работа $A = 1$ Дж? Плотность насыщенного пара $\rho = 1,28\cdot10^{-2}$ кг/м^3.

5. Три заряженных шарика связаны друг с другом двумя нитями и расположены на одной прямой (рис. 10). Длина каждой нити $l = 1$ м. Найдите силу натяжения нити, которая соединяет первый и второй шарики. Заряды шариков: $q_1 = 4\cdot10^{-9}$ Кл, $q_2 = 1\cdot10^{-9}$ Кл, $q_3 = 8\cdot10^{-9}$ Кл. Размерами шариков можно пренебречь. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8,85\cdot10^{-12}$ Ф/м.

6. Проволочное кольцо диаметром $d = 10$ см находится в однородном магнитном поле. Линии индукции магнитного поля перпендикулярны плоскости кольца. Индукция магнитного поля изменяется по линейному закону, приведенному на рисунке 11, достигая значения $B_1 = 0,8$ Тл за время $t_1 = 4$ с. Какое количество теплоты выделится в кольце за это время? Сопротивление кольца $R = 10$ Ом.

7. Амплитуда напряжения в сети переменного тока $U_m = 141$ В. Какая масса кипящей воды превратится в пар за время $\tau = 10$ мин при работе кипятильника, включенного в сеть с таким напряжением и находящегося в воде? При температуре $t = 20\ °$C сопротивление нагревателя кипятильника $R = 50$ Ом. Температурный коэффициент сопротивления проволоки нагревателя $\alpha = 0,02\ \text{K}^{-1}$. Удельная теплота парообразования воды $\lambda = 2,3\cdot10^6$ Дж/кг. Потерями тепла можно

Рис. 10

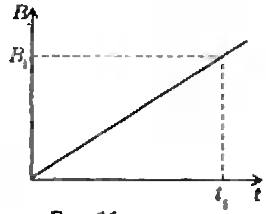


Рис. 11

пренебречь.

8. В колебательном контуре происходят свободные колебания, при которых максимальный заряд на обкладках конденсатора $q_m = 10^{-7}$ Кл, а максимальная сила тока $I_m = 0,1$ А. Найдите длину электромагнитной волны, соответствующую этим колебаниям.

9. Световод представляет собой цилиндрическое волокно диаметром $d = 2$ мм, изготовленное из прозрачного материала с показателем преломления $n = 1,4$. При каком минимальном радиусе r изгиба световода свет, вошедший в световод перпендикулярно плоскости поперечного сечения, распространяется в световоде, не выходя через боковую поверхность (рис. 12)?

10. Две тонкие линзы — собирающая с фокусным расстоянием $F_1 = F = 60$ см и рассеивающая с фокусным расстоянием $F_2 = F/2 = 30$ см — сдвинуты вплотную так, что их главные оптические оси совпадают. На расстоянии $2F$ от линз со стороны собирающей на главной оптической оси находится точечный источник света. Найдите расстояние от оптического центра линз до изображения источника.

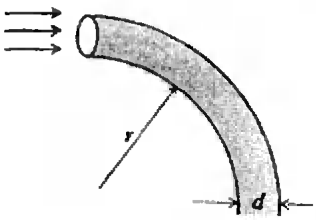


Рис. 12

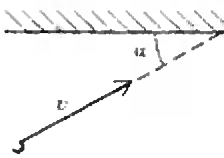


Рис. 13

Географический факультет

1. При равноускоренном движении тела с начальной скоростью величина перемещения за 5-ю секунду больше величины перемещения за 1-ю секунду на $\Delta s = 10$ м. Найдите ускорение тела.

2. На какой высоте от поверхности Земли ускорение свободного падения вдвое меньше, чем ускорение свободного падения на поверхности Земли? Считайте радиус Земли $R_З = 6400$ км.

3. Для нагревания некоторого количества идеального газа с молярной массой $M = 16\cdot10^{-3}$ кг/моль при постоянном давлении на $\Delta T = 10$ К потребовалось количество теплоты $Q_1 = 7$ Дж. Чтобы охладить этот газ до исходной температуры при постоянном объеме, от него надо отнять $Q_2 = 5$ Дж. Найдите массу газа. Универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(моль·К).

4. В помещении объемом $V = 100$ м^3 относительная влажность воздуха $\varphi_1 = 40\%$. Через некоторое время в помещении испарилось дополнительно $m = 0,46$ кг воды. Определите относительную влажность, которая установится после испарения. Плотность насыщенного водяного пара при температуре помещения $\rho_н = 0,023$ кг/м^3.

5. Два источника постоянного тока соединены последователь-

но и замкнуты через резистор сопротивлением $R = 4$ Ом. При этом в цепи течет ток $I_1 = 1$ А. После того как полюса одного из источников поменяли местами, ток стал равным $I_2 = 0,5$ А. Найдите ЭДС источников, если их внутренние сопротивления $r_1 = r_2 = 1$ Ом.

6. Электроемкость конденсатора колебательного контура может изменяться в пределах от C_1 до $C_2 = 25C_1$. Емкости C_1 соответствует частота колебаний в контуре $\nu_1 = 70$ МГц. Каков диапазон длин волн, на которые может быть настроен этот контур?

7. Человек приближается к плоскому зеркалу по прямой, образующей угол $\alpha = 30°$ с плоскостью зеркала, со скоростью $v = 1$ м/с (рис. 13). Определите скорость движения изображения человека в зеркале относительно человека.

8. На дне водоема глубиной $H = 1,2$ м находится точечный источник света. Найдите наибольшее расстояние от источника до того места на поверхности воды, где лучи выходят за пределы воды. Показатель преломления воды $n = 1,33$.

9. Светящаяся точка находится на главной оптической оси собирающей линзы на расстоянии $d = 30$ см от нее. Если эту точку сдвинуть на расстояние $l = 2$ см в направлении, перпендикулярном главной оптической оси, то ее действительное изображение сместится на расстояние $L = 10$ см. Найдите фокусное расстояние линзы.

10. Фотоэлемент облучается монохроматическим желтым светом с длиной волны $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ м. За некоторое время фотоэлемент поглотил энергию $W = 10^{-5}$ Дж. Найдите число поглощенных фотонов. Постоянная Планка $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Публикацию подготовили А.Будак, С.Волошин, В.Говоров, И.Иновенков, Г.Медведев, М.Потапов, В.Родин, А.Склянкин, А.Часовских, С.Чесноков

Новосибирский государственный университет

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Физический факультет

Каждый вариант состоял из задач трех типов.

Первые три задачи — расчетные, различной трудности: от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения разобраться в непривычной или усложненной физической ситуации.

Четвертая задача — это задача-оценка. Для ее решения надо понять рассматриваемое физическое явление, сформулировать простую (так как нужна только оценка) физическую модель этого явления, выбрать разумные числовые значения физических величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивалось, что абитуриент может сам выбрать необходимые для решения задачи величины и их числовые значения.

Пятая задача — это задача-демонстрация, в которой надо объяснить физическое явление, демонстрируемое в аудитории. Здесь важно понять сущность явления и среди различных факторов выделить главный.

Вариант 1

1. На перекладину с круглым сечением надета петля из тонкой легкой однородной нити (рис. 1). К петле с помощью невесомого крюка A на такой же нити подвешен груз, массу которого постепенно увеличивают до разрыва нити. Определите, при каких значениях угла α порвется петля, а при каких — нить, соединяющая груз с крюком.

2. Сосуд с газом объемом V_0 перекрыт двумя поршнями, массы которых m_1 и m_2 ($m_1 < m_2$), а площади одинаковы и равны S (рис. 2). Поршни снабжены легкими горизонтальными платформами, которые могут зацепляться друг за друга. В исходном состоянии поршни удерживаются от опускания упорами, расстояние между платформами h. Газ в объеме медленно нагревают, и при температуре T_1 поршень массой m_1 начинает подниматься. При какой температуре начнет подниматься поршень массой m_2? Атмосферное давление p_a, ускорение свободного падения g.

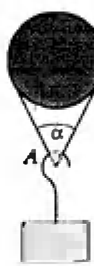


Рис. 1

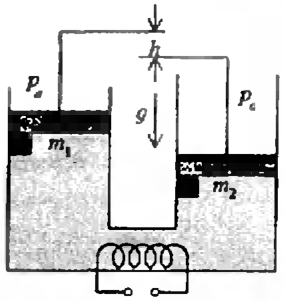


Рис. 2

3. Четыре металлические пластины площадью S каждая расположены параллельно друг другу на равных расстояниях d и соединены в электрическую схему, показанную на рисунке 4. В исходных состояниях ключи K_1 и K_2 находятся в положениях, при которых средние пластины соединены с источниками ЭДС напряжениями U_1 и U_2, а наружные пластины соединены друг с другом через верхний резистор. Затем ключи одновременно переключают так, что средние пластины отсоединяются от источников и подключаются к нижнему резистору. Найдите полное количество теплоты, выделившееся в схеме после переключения.

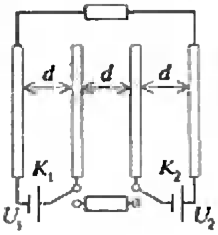


Рис. 3

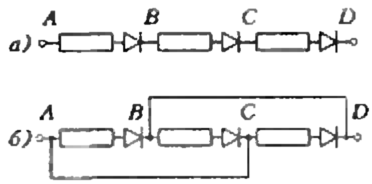


Рис. 4

4. Оцените минимальную работу, которую нужно затратить, чтобы накачать велосипедную шину.

5. Луч лазера проходит через прямоугольный сосуд, заполненный водой, и создает светящееся пятно на экране, которое при вращениях сосуда смещается. Объясните, почему пятно перестает смещаться, если между сосудом и экраном на определенном расстоянии поместить линзу.

Вариант 2

1. Через три одинаковых диода и три одинаковых резистора, соединенных последовательно в цепь и подключенных к источнику постоянного напряжения (рис. 4,*а*), течет ток. Во сколько раз изменится ток, если точки A и C, а также B и D соединить проводниками с пренебрежимо малыми сопротивлениями (рис. 4,*б*)?

2. На гладкой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, лежит доска массой M (рис. 5). На доске находится брусок массой m. Доска и брусок связаны нерастяжимой невесомой нитью, перекинутой через блок, закрепленный на вершине наклонной плоскости. Коэффициент трения между бруском и доской μ. При каких отношениях M/m они будут неподвижны?

3. Гладкий теплоизолированный цилиндр сечением S с неподвижной перегородкой закрыт с двух сторон подвижными поршнями A и B (рис. 6). В отсутствие газа они поджимаются к

перегородке пружинами одинаковой жесткости, но закрепленными на разных расстояниях от перегородки. Под поршень A вводят газ (его объем V, давление p, температура T), а затем открывают узкий канал в перегородке, после чего весь газ медленно выдавливается в другой отсек. Какой объем займет газ, если известно, что в отсутствие газа поршень A оказывает на перегородку давление $p/2$, а поршень B лишь касается ее? Газ можно считать теплоизолированным. Внутренняя энергия газа U связана с его температурой T соотношением $U = cT$, где c — заданная постоянная. Атмосферное давление не учитывайте.

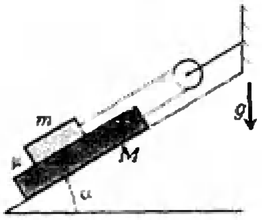


Рис.5

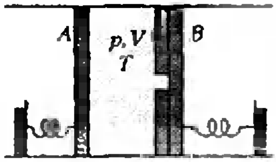


Рис.6

4. С помощью стекла от очков солнечный свет сфокусировали в пятно радиусом 1 мм. Оцените, на сколько нужно сместить вдоль оси стекло, чтобы радиус пятна вырос вдвое.
5. Из двух одинаковых сосудов через одинаковые отверстия в дне вытекает вода. Объясните, почему из сосуда, к отверстию которого подсоединена длинная трубка, вода вытекает быстрее, чем из сосуда с короткой трубкой.

Вариант 3

1. На горизонтальном полу лежит клин, вершина которого касается вертикальной стенки (рис. 7). Сверху на клин кладут массивное бревно, масса которого много больше массы клина. При каком угле α клин не сдвинется с места, если коэффициент трения клина о пол μ, а трение бревна о стенку и клин отсутствует?

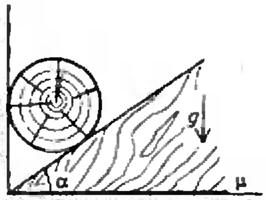


Рис.7

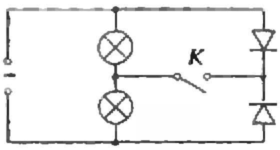


Рис.8

2. В трубе сечением S могут свободно, без трения двигаться два поршня, массы которых M и m. Начальное расстояние между поршнями L, атмосферное давление p_a. Газ, находящийся между поршнями, полностью откачали, после чего поршни отпустили. Какое количество теплоты выделится при их абсолютно неупругом соударении?
3. Две одинаковые металлические пластины с площадью S каждая расположены одна над другой параллельно заземленной металлической плоскости на расстояниях h_1 и h_2 от нее. Вначале пластины имеют заряды q_1 и q_2. Верхнюю пластину соединяют с плоскостью через резистор. Какое количество теплоты выделится в резисторе?
4. Оцените силу, которая действует на плечо со стороны приклада при выстреле из ружья.
5. Схема, состоящая из двух лампочек и двух диодов, включена в сеть переменного тока (рис. 8). Объясните, почему при замыкании ключа K лампочки начинают гореть ярче.

Публикацию подготовил Г. Меледин

Независимый московский университет

Математический колледж

МАТЕМАТИКА

Первый день (26 июня) [1]

1. Прямые $L_1, L_2, \ldots, L_n$ на плоскости проходят через одну точку. Докажите, что геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до этих прямых постоянна, есть контур выпуклого многоугольника.
2. Укажите какое-либо разложение многочлена $x^{10} + x^5 + 1$ на множители ненулевой степени с целыми коэффициентами.
3. Функция $F(x)$ определена при всех действительных x, причем для любого x выполняются условия:

а) $F(x+3) \le F(x)+3$;

б) $F(x+2) \ge F(x)+2$.

Докажите, что функцию $F(x)$ можно представить в виде $F(x) = x + G(x)$, где $G(x)$ — некоторая периодическая функция.
4. Из вершины с координатами $(0,0,0)$ единичного куба

$$0 \le x, y, z \le 1$$

вылетает шарик со скоростью $v = (6,15,10)$. Шарик отражается от стенок куба по закону «угол падения равен углу отражения» до тех пор, пока не ударится в ребро. В какое ребро ударится шарик и сколько отражений произойдет до этого удара?
5. Докажите, что

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx > \int_0^1 3^{-(x-1)^2}\,dx.$$

6. Вершины единичного куба раскрашены в белый и черный цвета так, что концы каждого ребра покрашены в разные цвета. Рассмотрим два тетраэдра — с белыми и черными вершинами соответственно. Найдите объемы:

а) пересечения;

б) объединения этих тетраэдров.

Второй день (28 июня) [2]

7. Множество M в пространстве таково, что его ортогональная проекция на некоторую плоскость есть треугольник со сторонами 3, 4, 5, а ортогональная проекция на некоторую другую плоскость есть круг с диаметром d. При каких d это возможно?
8. Сколько точек самопересечения у кривой, которую описывает точка $M(x;y)$, если $x=\cos 15t$, $y=\cos 17t$, $t \in [0,\pi]$?
9. Показателем невписанности четырехугольника назовем наименьшее из таких чисел d, что перемещением вершин четырехугольника на расстояния, не превышающие d, их можно поместить на одной окружности (прямую считаем окружностью бесконечного радиуса). Найдите максимальное значение показателя невписанности для ромбов со стороной 1.
10. О многочлене $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ известно, что

1) $P(1)=1$;

2) $P(0,9)=0$;

3) $-0,1 \le P(x) \le 0$ при $0 \le x \le 0,9$.

Докажите, что

а) $n>2$;

б) $n>3$.

Публикацию подготовили В. Имайкин, Н. Константинов

[1] Каждая задача оценивалась в 10 баллов.

[2] Каждая задача оценивалась в 15 баллов.

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

Задачи

(см. «Квант» № 1)

1. Поскольку в кошельке было хотя бы по одной купюре в 3, 5 и 10 рублей, то рублевых купюр было не меньше восемнадцати, а *всего — не меньше* двадцати одной купюры. Из них осталось не меньше шестнадцати, а следовательно, осталось не меньше шестнадцати рублей.

2. Имеем: $133\ldots33 + 133\ldots34 + \ldots + 533\ldots33 = \frac{1}{2}(133\ldots33 + 533\ldots33)(533\ldots33 - 133\ldots33 + 1) =$
$= 333\ldots33 \cdot 400\ldots01 = 133\ldots32 \cdot 10 + 33\ldots33 = 133\ldots3533\ldots33.$

3. Если бы каждый гость был человеком, то ответ очевиден: 4 человека и 3 мешка, но вспомним, что один из гостей был чертом! Следовательно, Солоха посадила в мешки 3 человека (и одного черта).

4. $9^2 + 4^3 = 3^4 + 0^5 + 2^6$, 9=4+3+0+2.

5. Выпишем возможные прямоугольники в порядке возрастания их площади: 1×1, 1×2, 1×3, 1×4, 2×2, 1×5, 1×6, 2×3, 1×7, 1×8, 2×4, ... Нетрудно определить, что сумма площадей любых 10 различных из них не меньше 46, а площадь исходного прямоугольника 5×9 равна 45, следовательно, среди них найдутся по *крайней мере* два одинаковых.

Конкурс «Математика 6-8»

(см. «Квант» № 9/10 за 1993 год)

1. Утверждение этой задачи является следствием тождества
$x(x+2)^3 - (x+1)(x-1)^3 = (2x+1)^3$.

2. Пусть вершины куба обозначены так: A, B, C, D, A_1, B_1, C_1 и D_1, причем над вершиной A находится A_1, над B — B_1 и т.д. Поместим в эти вершины грузы в таком порядке: 1, 4, 7, 6, 8, 5, 2 и 3 грамма. *В этом случае сумма грузов на каждой грани* равна 18 граммам, и поэтому центр тяжести системы равноудален от всех граней, а значит, находится в центре куба.

3. Проведем в треугольнике ABC его медианы AA_1, BB_1 и CC_1, пересекающиеся в точке M. Отметим теперь, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ гомотетичны с центром в точке M и коэффициентом 2:1. Поэтому окружность, описанная вокруг треугольника $A_1B_1C_1$, имеет радиус вдвое меньший, чем окружность, описанная вокруг треугольника ABC, а точка M лежит на отрезке, *соединяющем центры этих* окружностей, и делит его в отношении 2:1. Заметим, что точка D пересечения биссектрисы треугольника, проведенной из одной его вершин, с описанной окружностью делит дугу, заключенную между двумя другими вершинами, на равные части.

Теперь приступим к построению (см. рис. *1*). *Итак, известны* точки O, M и точка D. Построим точку O_1, продолжив отрезок OM за точку M на расстояние MO_1, равное половине OM. Проведем две окружности: S с центром в точке O и радиусом OD (описанную вокруг треугольника ABC) и S_1 с центром O_1 и вдвое меньшим радиусом (описанную вокруг треугольника $A_1B_1C_1$). *Если* считать, что точка D принадлежит продолжению биссектрисы угла C, то точка C_1 лежит на отрезке OD, поскольку он пересекает отрезок AB в его середине, и на окружности S_1. Значит, *точка* C_1 *уже будет* построена, как только мы проведем отрезок OD. Теперь сразу находятся точки A и B, для чего достаточно провести через точку C_1 перпендикулярную прямую к OD и отметить ее точки пересечения с окружностью S. Чтобы найти точку C, достаточно провести прямую MC_1 (медиану CC_1) и отметить ту точку ее пересечения с окружностью S, *которая лежит* за точкой M, а не за точкой C_1.

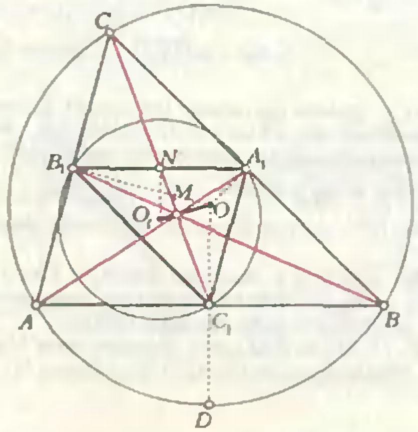


Рис. 1

4. Это числа 370 и 371. Почему только эти числа удовлетворяют условию, можно узнать, прочтя статью А.Савина «На круги свои», «Квант» № 1, 1987 г.

5. а) Если целая часть числа x равна нулю, то $\{x^2\} = \{x\}^2$ и указанное равенство не может выполняться. Пусть $[x] = 1$, а $\{x\} = \alpha$, тогда
$$\{x^2\} = \{(1+\alpha)^2\} = \{1 + 2\alpha + \alpha^2\}.$$
Получаем
$$\{1 + 2\alpha + \alpha^2\} - \alpha^2 = \frac{1}{1993}.$$
Так как мы ищем наименьшее x, то можем считать, что число α мало, а именно, что $2\alpha + \alpha^2 < 1$, откуда получаем, что
$$2\alpha + \alpha^2 - \alpha^2 = \frac{1}{1993},$$
т.е.
$$\alpha = \frac{1}{2 \cdot 1993} = \frac{1}{3986}, \text{ а } x = \frac{3997}{3986}.$$
б) Снова обозначив $\{x\} = \alpha$, запишем уравнение:
$$[(a+\alpha)^2] - a^2 = 1993,$$
т.е.
$$a^2 + [2a\alpha + \alpha^2] - a^2 = 1993.$$
Таким образом,
$$[2a\alpha + \alpha^2] = 1993,$$
Откуда
$$2a\alpha + \alpha^2 \geq 1993,$$
а так как $0 \leq \alpha \leq 1$, то $2a + 1 > 1993$, т.е. $a > 996$. *Итак,* $a \geq 997$. Теперь найдем наименьший корень уравнения, для которого a=997. Поскольку при фиксированном a значение выражения $2a\alpha + \alpha^2$ тем меньше, чем меньше α, для минимального x приходим к уравнению
$$2a\alpha + \alpha^2 = 1993,$$
или (при a=997)
$$1994\alpha + \alpha^2 = 1993.$$
Отсюда
$$\alpha = \frac{1993}{\sqrt{997 \cdot 993 + 997}},$$
а
$$x = \sqrt{997^2 + 993} = \sqrt{996002} = 997{,}99899\ldots$$
Замечание. Решений с целой частью *a=997 бесконечно много; они* имеют вид $x = 997 + \alpha$, где α удовлетворяет неравенствам $0 \leq \alpha^2 + 1994\alpha - 1993 < 1$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СТРАНИЧКА

(см. с. 40)

2. Пусть ABC — остроугольный треугольник. Нетрудно доказать, что окружности, симметричные описанной около ABC окружности, пересекаются в некоторой точке H внутри ABC. При этом $\angle HBA = \angle HCA = \alpha$, $\angle HAB = \angle HCB = \beta$, $\angle HAC = \angle HBC = \gamma$. Значит, $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180°$.

$\alpha + \beta + \gamma = 90°$. Теперь легко получить, что H — точка пересечения высот треугольника ABC. Аналогично рассматривается случай тупоугольного треугольника.

6. Точка C есть точка пересечения окружностей, симметричных окружности, описанной около ABH, относительно AH и BH. Значит (см. задачу 2), C — точка пересечения высот треугольника ABH. Затем можно воспользоваться результатом задачи 5.

8. Пусть M — середина AH, A_0 — середина BC, O — центр описанной окружности. Поскольку $AM=OA_0$ (задача 4), то AMA_0O — параллелограмм и $MA_0=AO$.

9. Точки H, A_1, C и B_1 лежат на одной окружности. Значит, $\angle HA_1B_1 = \angle HCB_1$. Точно так же, $\angle HA_1C_1 = \angle HBC_1$. Далее докажем, что $\angle HCB_1 = \angle HBC_1$ и т.д.

10. 60° или 120°.

11. Докажите, что $\angle B_1A_1C + \angle OCA_1 = 90°$ (если ABC — остроугольный, то $\angle B_1A_1C = \angle BAC$, $\angle OCA_1 = \frac{1}{2}(180° - 2\angle BAC)$).

12. Rp. Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи.

13. Может. Например, равнобедренный треугольник с основанием 1000 и высотой 1/2.

14. Пусть стороны треугольника a, b и c, высоты к этим сторонам h_a, h_b и h_c. Поскольку $ah_a = bh_b = ch_c$, то $a : 1/h_a = b : 1/h_b = c : 1/h_c$. Возьмем любой отрезок d, тогда треугольник со сторонами d^2/h_a, d^2/h_b, d^2/h_c подобен искомому.

16. Возьмем точку D так, что $AHBD$ — параллелограмм. Можно доказать, что D лежит на описанной около ABC окружности, а угол BDC равен α или $180° - \alpha$. Значит, $AH = BD = a|\mathrm{ctg}\,\alpha|$.

17. $a|\mathrm{ctg}\,\alpha|$.

19. Если M — внутри ABC, то M совпадает с точкой пересечения высот треугольника ABC. Докажем это. Обозначим через A_1 и C_1 точки пересечения AM и CM соответственно с BC и AB (рис. 2). Из условия следует, что точки A, C, A_1 и C_1 лежат на одной окружности. Значит, $\angle A_1C_1M = \angle MAC$. Теперь оказывается, что на одной окружности лежат также и A_1, B, C_1 и M. В итоге имеем $\angle MCA = \angle MA_1C_1 = \angle MBA$. Положим

$\angle MAC = \angle MBC = \alpha$, $\angle MAB = \angle MCB = \beta$,

$\angle MBA = \angle MCA = \gamma$, $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180°$, т.е.

$\alpha + \beta + \gamma = 90°$.

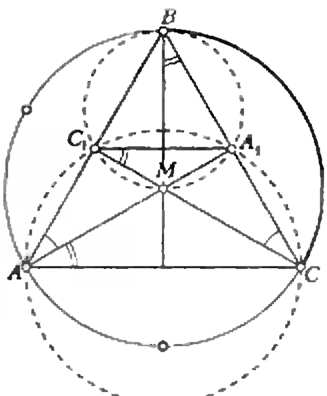


Рис.2

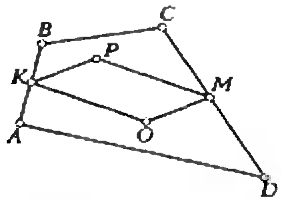


Рис.3

Отсюда следует, что M — точка пересечения высот ABC. Кроме этой точки в наше геометрическое место входят середины дуг AB и AC и вся дуга BC.

20. Возьмем на прямой AB точку D так, что $BD=AB$, $AD=2AB$. Из условия следует, что CD вдвое больше расстояния от D до BC, т.е. $\sin \angle BCD = 1/2$, $\angle BCD=30°$ или 150°. Искомое геометрическое место состоит из двух окружностей, проходящих через B и D и таких, что хорда BD делит каждую на две дуги величиной 60° и 300°. (Точки B и D исключаются).

21. Рассмотрим четырехугольник $ABCD$, вписанный в окружность с центром в точке O (рис. 3). Пусть K и M — середины AB и CD. Опустим из них перпендикуляры на противоположные стороны и обозначим через P точку пересечения этих перпендикуляров. $KPMO$ — параллелограмм. Значит, P симметрична O относительно середины KM. Но отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника, пересекаясь, делятся пополам. Значит, все четыре перпендикуляра пересекаются в точке P.

22. Из результата задачи 16 следует, что $AH_A = BH_B$. Но $AH_A \parallel BH_B$. Значит, ABH_BH_A — параллелограмм, и отрезки AH_A и BH_B пересекаются в точке P, делящей их пополам. Теперь можно показать, что и CH_C, DH_D также проходят через P и делятся ею пополам. Значит, четырехугольник $H_AH_BH_CH_D$ симметричен четырехугольнику $ABCD$ относительно точки P.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СТРАНИЧКА

(см. «Квант», № 1)

1. а) Пусть $\breve{AB} = \alpha$, $\breve{A'B'} = \beta$, тогда

$\angle ACB = \varphi = \angle AB'B + \angle B'AA' = (\alpha + \beta)/2$ (рис. 4).

б) $\angle ACB = \psi = \angle AA'B - \angle A'BB' = (\alpha - \beta)/2$ (рис. 5).

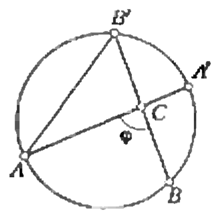


Рис.4

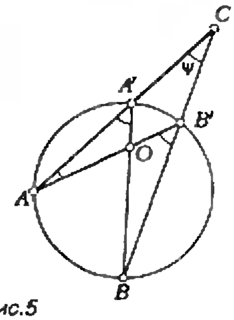


Рис.5

в) $\angle ABC = 90° - \angle BB'A = \frac{1}{2}(\breve{B'AB} - \breve{B'A}) = \frac{1}{2}\breve{AB}$ (рис. 6).

2. Две дуги, симметричных относительно прямой AB (рис. 7).

3. Если, скажем, центр окружности и вершина C лежат по разные стороны от AB, то $\angle C > 90°$.

4. См. рис. 8.

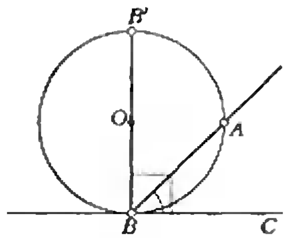


Рис.6

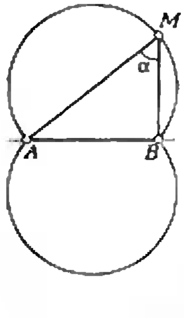


Рис.7

5. Пусть AC — диаметр окружности (см. рис. 9). Так как ΔABC — прямоугольный, $a = 2R\sin\alpha = 2R\sin(180° - \alpha)$. Выведите отсюда теорему синусов: для любого треугольника ABC:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

6. 20° (точка M — центр окружности, описанной около ΔABC).

7. $a\sqrt{10}/4$.

8. 39°. Пусть $\angle ACD = x$. Выразите углы KBC и KCB через x.

9. $ABCD$ — либо ромб, либо прямоугольник, соответственно $\angle ACD = 40°$ в первом и 50° во втором случае.

10. 40°, 65°, 75°. Пусть P, Q и R — проекции точки M на данные 3 прямые, проходящие через точку O. Тогда точки M, O, P, Q, R

лежат на одной окружности (с диаметром OM).

11. Пусть L — точка пересечения окружности BKD и прямой CD. Докажите, что точка L принадлежит окружности AKB.

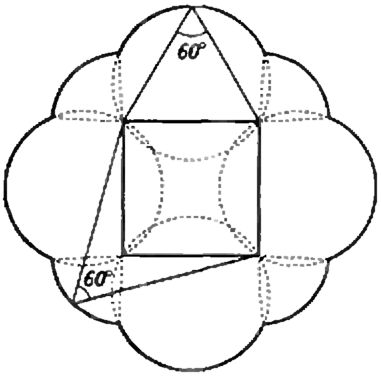


Рис.8

12. 8°, 108°, 64°. 13. π и 3π.

14. Пусть M — точка пересечения окружностей, описанных около треугольников A_1B_1C и A_1BC_1. Рассмотрим случай, когда M внутри треугольника ABC. Имеем

$\angle A_1MB_1 = 180° - \angle C$, $\angle A_1MC_1 = 180° - \angle B$.

Тогда

$\angle B_1MC_1 = 360° - (180° - \angle C) - (180° - \angle B) =$

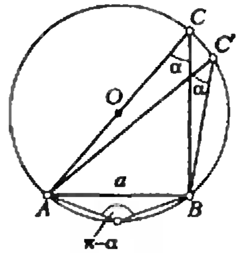


Рис.9

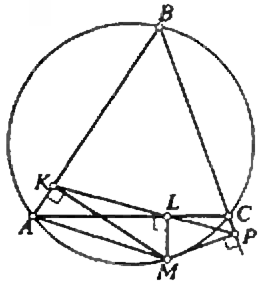


Рис.10

$= \angle C + \angle B = 180° - \angle A$.

Это означает, что M лежит на окружности, описанной около треугольника AB_1C_1. Надо рассмотреть еще случай, когда M вне ABC.

15. Следствие результата предыдущей задачи.

16. Обозначения понятны из рис.10. Точки A, K, L и M лежат на одной окружности. Значит,

$\angle KLA = \angle KMA = 90° - \angle BAM$.

Точно так же на одной окружности находятся точки M, L, C и P. Значит,

$\angle CLP = \angle CMP = 90° - \angle MCP =$

$90° - (180° - \angle MCB) = \angle MCB - 90° =$

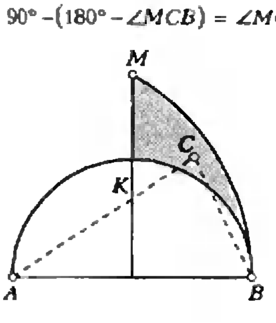


Рис.11

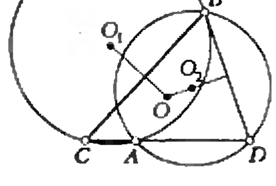


Рис.12

$(180° - \angle BAM) - 90° = 90° - \angle BAM$.

Таким образом, $\angle KLA = \angle CLP$, т.е. K, L и P лежат на одной прямой.

17. Искомое геометрическое место представляет собой криволинейный треугольник KMB (рис. 11). Граница этого треугольника состоит из отрезка KM, лежащего на серединном перпендикуляре к AB, и двух дуг: KB — части полуокружности с диаметром AB, и MB — дуги с центром в A.

18. Окружность с диаметром AD, где D — точка на прямой AB такая, что $BD = \frac{1}{2}AB$, $AD = \frac{3}{2}AB$.

19. Заметим сначала, что все треугольники BCD подобны между собой (рис. 12). Для того, чтобы в этом убедиться, докажите, что $\angle C$ измеряется половиной дуги, а $\angle D$ — половиной соответствующей дуги второй окружности при любом положении прямой CD. Пусть O_1 и O_2 — центры данных окружностей, O — центр описанной около BCD окружности. Поскольку $O_1O \perp BC$, $O_2O \perp BD$, то угол O_1OO_2 в зависимости от положения точки O относительно O_1O_2 равен либо углу CBD, либо дополняет его до 180°. Искомое геометрическое место есть окружность, проходящая через O_1, O_2 и B с выколотой точкой B.

20. $a/(2\sin\alpha)$.

21. Пусть M — точка пересечения каких-либо двух окружностей. Докажите, что через M проходит и третья. Обратите внимание на то, что точка M в каждом случае может располагаться относительно ABC по-разному.

Немного о волновой оптике

1. $a_{отр} = (a_1 - a_2)/2$; $\Delta x = \pi c/\omega$. 2. $n_a = n_в + \lambda/L = 1{,}000297$.

3. $\lambda = 4nh/(2m+1)$, $\lambda_1 = 640$ нм, $\lambda_2 = 457$ нм.

4. $f = c/(2h(\alpha_2 - \alpha_1)) \approx 10^6$ Гц. 5. $v = \lambda L f/d \approx 4{,}5 \cdot 10^{-3}$ м/с.

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $(-1/12;0) \cup (1/12;6)$. Исходное неравенство равносильно системе $-\frac{35}{3}x - 1 < 4x^2 - 12x - 1 < \frac{35}{3}x + 1$.

2. 105. Если b_1, b_2, …, b_n, … — геометрическая прогрессия со знаменателем $b_1 + b_2 + \ldots + b_{21} = (b_1 + b_2 + b_3)(1 + q + \ldots + q^6)$.

3. Нет. Если диагональ трапеции является биссектрисой одного из ее углов, то один из двух треугольников, на которые она разбивает трапецию, — равнобедренный.

4. $-\pi/3$; 0; $\pi/3$. Уравнение равносильно системе:

$2\sin(x - a) + \sqrt{3} = 0$, $\cos 6x = 1$.

5. 1/3. Пусть K и L — точки пересечения прямой $A'C$ с параллельными (почему?) плоскостями $AD'B'$ и BDC' соответственно. Поскольку $KLMN$ — параллелограмм, а отрезки $A'K$, KL и LC равны как параллельные проекции на $A'C$ равных и параллельных отрезков AA', BB' и CC', получаем, что $MN = KL = \frac{1}{3}AC$.

6. $a \in (-1;0]$. После преобразований приходим к неравенствам

$-4 < t(t+a)^2 \le 1$,

где $t = \cos x$, которые должны выполняться при всех $-1 \le t \le 1$. При $t = 1$ и $a > 0$ не выполняется правое из неравенств, при $a \le -1$ и $t = -1$ — левое. В то же время при всех $-1 \le t \le 1$ и $-1 < a \le 0$ оба неравенства справедливы.

Вариант 2

1. (1; 2). 2. $[-4; 4]$. Задача сводится к определению всех b, при которых квадратное уравнение $y^2 + (b^2 + 6)y - b^2 + 16 = 0$ не

имеет положительных корней.

3. $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k; -\frac{5\pi}{6}+2\pi m\right)$; $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi n; -\frac{2\pi}{3}+\pi(n+2l)\right)$, $k, l, m, n \in \mathbf{Z}$.

Поскольку уравнение $2+\sin 2y+\cos y=0$ не имеет корней (оно равносильно системе $\cos y=-1$, $\sin 2y=-1$), получаем систему

$$\begin{cases}(\sin y-\cos x+1)\left(\operatorname{tg}^2(x+\pi/6)+\operatorname{tg}^2(y+2\pi/3)\right)=0,\\ \cos x+\sin y=0.\end{cases}$$

которая, в свою очередь, равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases}\sin x-\cos x+1=0,\\ \cos x+\sin y=0,\\ \cos(x+\pi/6)\neq 0,\ \ \cos(y+2\pi/3)\neq 0.\end{cases}$$

и

$$\begin{cases}\operatorname{tg}(x+\pi/6)=0,\\ \operatorname{tg}(y+2\pi/3)=0,\\ \cos x+\sin y=0.\end{cases}$$

4. $3\sqrt{5}/5$. Рассмотрите различные возможные случаи расположения точки Q на общих касательных двух касающихся окружностей с центрами в точках P и R (см. рис. 13).

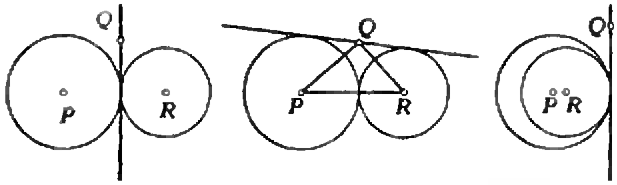


Рис. 13

5. $a\sqrt{3{,}9}$. Пусть $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ — точки пересечения сферы с рассматриваемыми отрезками (рис. 14), а $SB=x$. Из равенств $SB\cdot SA=SC\cdot SD$, $SA=3SB$, $SD=3SC$ следует $SB=SC=x$. Далее получаем $SB=SC=DR=RI=QH=QG=PF=PA=x$, $PS=SR=RQ=QP=4x$.

Пусть K — центр окружности O, являющейся сечением сферы

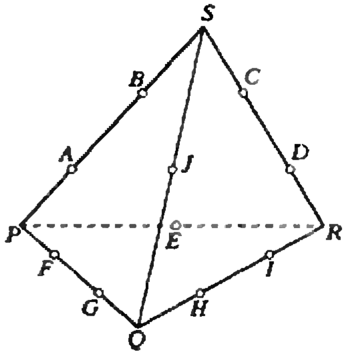


Рис. 14

плоскостью PSR. Треугольники SKB и SKC равны (по трем сторонам). Следовательно, $\angle BSK=\angle KSC$. Биссектриса SK равнобедренного треугольника PSR является его медианой и высотой. Поэтому SK проходит через точку E и PR — касательная к окружности O в точке E, т.е. PR — касательная к рассматриваемой сфере, но тогда $PE^2=PA\cdot PB$, откуда $PE=x\sqrt{3}$. Далее получаем $PE=ER=SJ=JQ=x\sqrt{3}$,

$PJ=JR=\sqrt{SR^2-SJ^2}=x\sqrt{13}$.

Похожими рассуждениями доказываем, что прямая SQ касается сферы в точке J. Поэтому из перпендикулярности RJ и PJ к SQ следует, что центр K_1 рассматриваемой сферы лежит в плоскости PJR и совпадает с центром окружности O_1, получаемой в сечении сферы плоскостью PJR. Окружность O_1 проходит через точку J и касается отрезка PR в точке E. Поэтому K_1 лежит на отрезке JE, являющемся медианой и высотой равнобедренного треугольника PJR. Поэтому

$2a=JE=\sqrt{JR^2-ER^2}=x\sqrt{10}$,

откуда $x=\sqrt{\frac{2}{5}}a$.

Пусть h — расстояние от P до прямой QR. Тогда $QE\cdot PR=h\cdot QR$, откуда

$$h=\frac{QE\cdot PR}{QR}=\sqrt{3{,}9}a.$$

6. 120 км. Пусть x — расстояние между пунктами A и B, а v_1 и v_2 — скорости первого и второго мотоциклистов соответственно. Условия задачи записываются в виде системы

$$\begin{cases}2\left|\frac{2}{3}v_1-\frac{2}{3}v_2\right|=\left|\frac{2}{3}v_1-\left(x-\frac{2}{3}\cdot 80\right)\right|,\\ |v_1-v_2|=|v_1-(x-80)|=\frac{1}{2}(x-80),\\ \left|\frac{4}{3}v_1-\frac{4}{3}v_2\right|=\frac{2}{5}\left|\frac{4}{3}v_1-\left(x-\frac{4}{3}\cdot 80\right)\right|.\end{cases}$$

После замены переменных $|v_1-v_2|=y$, $v_1+80=z$ и исключения переменной y, приходим к системе

$$\begin{cases}|z-x|=\frac{1}{2}(x-80),\\ \frac{3}{4}\left|\frac{2}{3}z-x\right|=\frac{1}{2}(x-80),\\ \left|\frac{2}{3}z-x\right|=\frac{2}{5}\left|\frac{4}{3}z-x\right|.\end{cases}$$

Далее, рассматривая отдельно два случая: $z<x$ и $z\geq x$, выразим z через x из первого уравнения. Тогда, используя второе и третье уравнения, в каждом из случаев получим систему для определения x.

Вариант 3

1. $(2-\sqrt{2};1)\cup(3;2+\sqrt{2})$. Основание логарифма — число $\sqrt{8-2\sqrt{7}}+1-\sqrt{3}=\sqrt{\left(\sqrt{7}-1\right)^2}+1-\sqrt{3}=\sqrt{7}-\sqrt{3}<1$.

2. $[0;\pi/3]$. При $\sqrt{3}\cos x-\sin x\geq 0$ после возведения в квадрат получаем тождество.

3. $[\log_3 4;3]$. Пусть $a=3^x-4$, $b=x^2-4x+3$. Неравенство приводится к виду $|a+b|\leq a-b$, но это значит, что $a\geq 0$, $b\leq 0$.

4. $12/5$. Пусть $AB=BC=y$, $AC=2x$. Тогда

$$R=\frac{x}{\sin B}=\frac{x}{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}=\frac{y^2}{2\sqrt{y^2-x^2}}.$$

Из теоремы косинусов для треугольника EBD, пользуясь тем, что $\cos B=1-2\cos^2 C=(y^2-2x^2)/y^2$, получаем:

$y^2+48x^2=23\cdot 9$.

Аналогично, $EC^2=2x^2+y^2/4$. Осталось записать формулу для медианы CQ треугольника ECD и решить полученную систему уравнений.

5. $M(4;-2)$ при $b=-a^2-1$, $a\in\mathbf{R}$; $M(2;0)$ при $a=b=0$. Решая данную систему уравнений, получаем

$$x=\frac{2\left(a^2-b+1\right)}{a^2+1},\quad y=\frac{2b}{a^2+1}.$$

Подставив эти значения в уравнение прямой, получаем после преобразований уравнение

$b^2+b-\left(a^2+a^4\right)=0$,

откуда $b=a^2$, $b=-a^2-1$.

При $b=-a^2-1$ получаем точку $M(4;2)$. Если $b=a^2$, то $x=2/\left(a^2+1\right)$, $y=2-x$. Эти точки при $a\in\mathbf{R}$ образуют полуинтервал, расположенный на прямой $y=2-x$ с концами в точках $M(0;2)$ и $M(2;0)$. Точка $N(3;-1)$ лежит на той же прямой, и ближайшей к ней точкой полуинтервала является точка $M(2;0)$.

6. $|a| > 1$. Пусть $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$, $g(x) = 3\cos x - 2\cos^3 x$. Мы должны найти такие значения a, при которых все корни уравнения

$$f(x) = a \qquad (1)$$

содержатся среди корней уравнения

$$g(x) = a\sqrt{2}. \qquad (2)$$

Заметим, что $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = x$ при всех $x \in \boldsymbol{R}$. Поэтому если x_0 — корень уравнения (1), то $\frac{\pi}{2} - x_0$ — также корень этого уравнения. Если при этом x_0 является и корнем уравнения (2), то $\frac{\pi}{2} - x_0$ также должен быть корнем уравнения (2). При этом, разумеется, x_0 удовлетворяет уравнению

$$g(x_0) = g\left(\frac{\pi}{2} - x_0\right),$$

т.е.

$$3\cos x_0 - 2\cos^3 x_0 = 3\sin x_0 - 3\sin^3 x_0. \qquad (3)$$

Решая уравнение (3), получаем $x_0 = \frac{\pi}{4} + \pi n$.

Но если

$$f\left(\frac{\pi}{4} + \pi n\right) = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{2}} = a,$$

то

$$g\left(\frac{\pi}{4} + \pi n\right) = (-1)^n \sqrt{2} \neq a\sqrt{2}.$$

Таким образом, наши значения x_0 не могут быть одновременно корнями уравнений (1) и (2).

Мы доказали, что уравнения (1) и (2) не имеют общих корней. Поэтому для выполнения условий задачи необходимо и достаточно, чтобы уравнение (1) не имело корней. Легко видеть, что это будет при $|a| > 1$ (при $|a| \le 1$ уравнение $\sin^3 x + \cos^3 x = a$ имеет корни).

Вариант 4

1. $(-\infty; -1) \cup (0; 1)$. 2. $-2\operatorname{arctg} 2 + 2\pi k$, $2\operatorname{arctg} 1/2 + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.
3. $3 + 2\log_6 2$. 4. 10 и 30. 5. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

6. $\sqrt{2 - 1/k}$. Пусть $DC=1$, $\angle A = 2\varphi$, тогда $BD=k$, $AB=k+1$, $AC = 2(k+1)\cos 2\varphi$. По свойству биссектрисы

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{DB} = \frac{1}{k},$$

откуда $\cos 2\varphi = \frac{1}{2k}$, а по теореме синусов

$$\frac{DC}{R} = 2\sin\varphi = 2\sqrt{\frac{1 - \cos 2\varphi}{2}} = \sqrt{2 - \frac{1}{k}}.$$

7. $\varnothing$ при $a<1$; 0 при $a=1$; $a - 1$, $(1 - a)/3$ при $1 < a \le 2$; $(1+a)/3$, $(1 - a)/3$ при $a>2$.

8. $\sqrt{k}$. Пусть φ и ψ — величины двугранных углов с ребрами AB и BC соответственно. Грани ASB и BSC — проекции основания ABC, а треугольники AOB и BOC — проекции боковых граней на основание. Поэтому $S_{ABC} \cos^2\varphi = S_{AOB}$, $S_{ABC} \cos^2\psi = S_{BOC}$, откуда

$$\cos\varphi / \cos\psi = \sqrt{k}.$$

Но

$$S_{ABS} = S_{ABC}\cos\varphi,\ S_{BSC} = S_{ABC}\cos\psi.$$

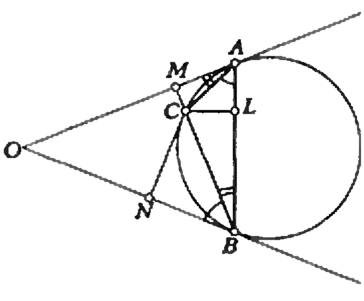


Рис. 15

Вариант 5

1. $(0; 1/2)$. 2. $(2\pi n - 15)/3$, $(2\pi n + 5)/4$, $n \in \boldsymbol{Z}$. 3. $2^{\frac{2+\sqrt{5}}{3}}$.
4. $R\sin 2\alpha \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. 5. $(-5; -2) \cup (-1; +\infty)$.

6. $\sqrt{ab}$. Треугольники CNB и CLA (рис. 15) подобны (это прямоугольные треугольники с равными углами CBN и CAL). Аналогично, подобны треугольники AMC и BLC. Поэтому $MC:CA=CL:CB$ и $CL:CA=CN:CB$. Деля первую пропорцию на вторую, получаем $MC \cdot CN = CL^2$.

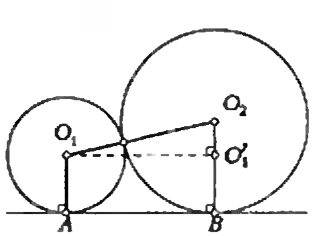


Рис. 16

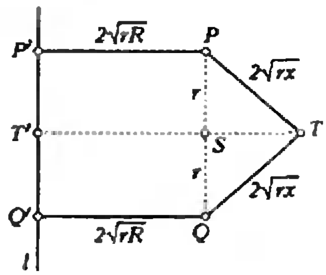


Рис. 17

7. $\pm\sqrt{3}$. Для корней биквадратного уравнения получаем, что либо $x^2 = x_1 = 3$, либо $x^2 = x_2 < 0$.

8. $\left(\dfrac{2R\sqrt{r} + r\sqrt{3R + r}}{2(R - r)}\right)^2$.

Если окружности O_1 и O_2 касаются внешним образом, то длина отрезка AB их общей внешней касательной (рис. 16) равна $2\sqrt{rR}$. Пусть l — образующая цилиндра, принадлежащая данной плоскости π, P и Q — точки касания шаров с радиусами r с плоскостью π, T — точка касания искомого шара с этой плоскостью, x — его радиус, а P', T', Q' — проекции точек P, T и Q на прямую l (рис. 17). Из прямоугольного треугольника PST (S — середина отрезка PQ, $PS=r$) получаем уравнение, из которого и находим x.

Вариант 6

1. $[-4; 1) \cup (-1; 2]$. 2. 3; 27. 3. πk, $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

4. 9. Докажите, что стороны прямоугольника параллельны диагоналям квадрата.

5. Уравнение корней не имеет.

Наименьшее значение левой части уравнения равно 4 и достигается при $x = -1$. Поскольку правая часть возрастает при $x \le 1$ и равна 4 при $x = 0$, уравнение не имеет корней при $x \le 0$. При $x > 0$ оно также не имеет корней, так как при таких x его левая часть больше 5.

Вариант 7

1. $\pi(4k + 1)/2$, $k \in \boldsymbol{Z}$. 2. 2. 3. $[-1/2; -1/14]$.

4. 194. Пусть q_1 и q_2 — знаменатели данных прогрессий. По условию

$$\begin{cases} q_1 + q_2 = -4, \\ q_1^5 + q_2^5 = -724. \end{cases}$$

Из равенств

$$(q_1 + q_2)(q_1^4 + q_2^4) = q_1^5 + q_2^5 + q_1 q_2 (q_1^3 + q_2^3) =$$
$$= q_1^5 + q_2^5 + q_1 q_2 (q_1 + q_2)\left((q_1 + q_2)^2 - 3q_1 q_2\right)$$

и

$$q_1^4 + q_2^4 = (q_1^2 + q_2^2)^2 - 2q_1^2 q_2^2 = \left((q_1 + q_2)^2 - 2q_1 q_2\right)^2 - 2q_1^2 q_2^2,$$

получаем для $x = q_1 q_2$ уравнение $x^2 - 16x + 15 = 0$, откуда либо $q_1 q_2 = 1$, либо $q_1 q_2 = 15$. Первая из двух систем $q_1 + q_2 = -4$, $q_1 q_2 = 15$; $q_1 + q_2 = -4$, $q_1 q_2 = 1$ решений не име-

ет, а вторая имеет. Поэтому $q_1q_2 = 1$. Дальнейшее ясно.
5. 1. Пусть Q и S — середины диагоналей AC и BD, а P и R — середины сторон AB и CD соответственно. Четырехугольник $PQRS$ — прямоугольник, так как его стороны QP и RS параллельны стороне BC (это средние линии в треугольниках ABC и BCD), а стороны PS и QR параллельны AD. Поэтому $QS=PR$.
6. (1; 0; 0). Из третьего уравнения следует, что $z^2 = 6y - y^2 \le 9$, т.е. $0 \le z \le 3$. Рассмотрим первое уравнение как квадратное относительно x. Для него $D/4 = z^2 - 3z$, откуда либо $z \le 0$, либо $z \ge 3$. Итак, либо $z=0$, либо $z=3$. При $z=0$ получаем из первого уравнения $x=1$, а из второго и третьего уравнений $y=0$. При $z=3$ из первого уравнения получаем $x=2$, а из третьего $y=3$, что противоречит второму уравнению.

Вариант 8

1. 6300 га. 2. $\pi(4n-1)/4$, $n \in \mathbb{Z}$. 3. $(-4;0)\cup(0;4)$. 4. 1.
5. $a \in [1/5;1]$. Исходное неравенство равносильно такому:
$$\frac{x^2+6xa-a-2}{x-a} < 0.$$
Нас интересуют значения a, при которых неравенство
$$(a-x)\left((6x-1)a + x^2 - 2\right) \le 0 \qquad (*)$$
выполняется при всех $x \ge 1$.
Решая неравенство (2) относительно a (с учетом неравенства $-(x^2-2)/(6x-1) < x$), получаем, что неравенства $-(x^2-2)/(6x-1) \le a \le x$ должны выполняться при всех $x \ge 1$. Но при $x \ge 1$ функция $y = -(x^2-2)/(6x-1)$ убывает. Тем самым ее наибольшее значение равно $1/5$ при $x=1$.
Итак, $1/5 \le a \le 1$.

Вариант 9

1. 3. 2. $\pi(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$. 3. $(-2;-1)\cup\{1\}$.
4. $3\sqrt{10}/4$. Поскольку $AD=AE=3$, $\cos\angle A = 11/16$, DE легко вычисляется по теореме косинусов.
5. -7; $-109/7$. Корни уравнения $x^4 + px^2 + q = 0$ образуют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда уравнение $t^2 + pt + q = 0$ имеет два различных положительных корня $t_1 < t_2$, причем числа $-\sqrt{t_2}$, $-\sqrt{t_1}$, $\sqrt{t_1}$, $\sqrt{t_2}$ образуют арифметическую прогрессию, т.е. при выполнении условий
$2\sqrt{t_1} = \sqrt{t_2} - \sqrt{t_1}$, $t_1 + t_2 = p$, $t_1t_2 = q$, иначе говоря, при $9t_1 = t_2$, $t_1 = -p/10$, $t_2 = -9p/10$. Наконец, $9p^2/100 = q$.
В нашем случае $p=a-3$, $q = (a+10)^2$, так что a удовлетворяет уравнению ($a<3$):
$3(3-a)/10 = |a+10|$, имеющему корни $a_1 = -7$, $a_2 = -109/7$.

Вариант 10

1. 2 при $a \ge 0$, $b \ge 0$, $a \ne b/4$. 2. $\pm\arcsin\frac{3}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Замена $y = |\sin x|$. 3. 2 ч 40 мин. 4. $[-1;0)\cup(0;3)$. $0 < \operatorname{tg}\frac{\pi}{9} < 1$.
5. 60°, 75°, 45°. Треугольники ECD и ACB подобны с коэффициентом подобия, равным $\cos\angle C$. Отсюда $\cos^2\angle C = 1/2$, т.е. $\angle C = 45°$. Остальное ясно.
6. $[1;2)\cup(2;3)$. Подкоренное выражение неотрицательно лишь при $\cos k\pi x = 1$, так что заданная функция определена при $x=2n/k$, $n \in \mathbb{Z}$, $k>0$, при этом $y=2x+1$. Из неравенства следует, что $1 \le x \le 2$. Таким образом, достаточно найти все $k>0$, при которых неравенство $1 \le 2n/k \le 2$ выполняется лишь при одном целом n, или, иначе говоря, когда отрезок $J=[k/2;k]$ содержит лишь одну целую точку. При $0<k<1$ отрезок J не содержит целых точек. При $4 > k \ge 3$ отрезок содержит 2 целые точки: $k=2$ и $k=3$. Если $k \ge 4$, длина J не меньше 2, и поэтому J содержит не меньше двух целых точек. Осталось убедиться, что условию удовлетворяют все k из объединения $[1;2)\cup(2;3)$.

Вариант 11

1. $(\log_7 6;1)\cup(\log_7 11;+\infty)$. 2. $\pi(6n+1)/6$, $n \in \mathbb{Z}$.
3. $[-2;-1]\cup\{2\}$. 4. $10+2\sqrt{5}$. Первое неравенство при $x \le -2$

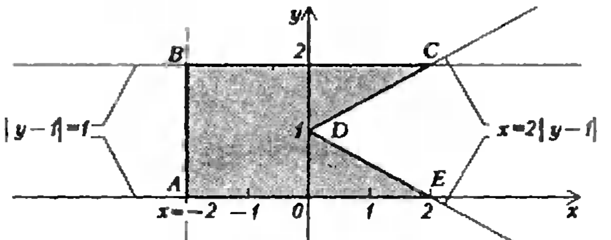


Рис. 18

решений не имеет, а при $x + 2 \ge 0$ оно равносильно неравенству $|y-1| \le 1$. На рисунке 18 показана фигура, задаваемая условиями задачи.
5. 12 месяцев. Пусть S — первоначальная сумма вклада, а t_1, t_2, t_3, t_4 — сроки действия (в месяцах) процентных ставок $p_1=5\%$, $p_2=11\frac{1}{9}\%$, $p_3=7\frac{1}{7}\%$, $p_4=12\%$ ежемесячного прироста вклада. Тогда условие увеличения суммы вклада по истечении общего срока хранения на $p=180\%$ можно представить в виде
$$S\left(1+\frac{p_1}{100}\right)^{t_1}\left(1+\frac{p_2}{100}\right)^{t_2}\left(1+\frac{p_3}{100}\right)^{t_3}\left(1+\frac{p_4}{100}\right)^{t_4} =$$
$$= S\left(1+\frac{p}{100}\right).$$
Сократим обе части на S, подставим конкретные значения p_1, p_2, p_3, p_4, p и преобразуем полученное равенство к виду
$$2^{-2t_1+t_2-t_3+2t_4-1}\cdot 3^{t_1-2t_2+t_3}\cdot 5^{-t_1+t_2+t_3-2t_4+1}\cdot 7^{t_1-t_3+t_4-1}=1.$$
Последнее может выполняться лишь в том случае, когда в левой части показатели всех степеней обращаются в 0.
Соответствующая система линейных уравнений имеет единственное решение $t_1=2$, $t_2=3$, $t_3=4$, $t_4=3$. Остается вычислить искомую сумму: $t_1+t_2+t_3+t_4=12$.
6. 195. Пусть AD, BE и CF — высоты данного треугольника ABC. Треугольники AFE, BDF и CDE подобные треугольнику ABC с коэффициентами подобия соответственно равными $\cos A$, $\cos B$ и $\cos C$. Так как площади подобных треугольников относятся как квадраты коэффициентов подобия,
$$S_{DEF} = S_{ABC}\left(1-\cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C\right).$$
Осталось заметить, что $\angle D = \angle FDE = \pi - 2A$, $\angle E = \angle DEF = \pi - 2B$, $\angle F = \angle EFD = \pi - 2C$, поэтому
$$\cos\angle FDE = -\cos 2A = 1 - 2\cos^2 A.$$
Пользуясь аналогичными соотношениями для остальных углов, получаем
$$2S_{DEF} = S_{ABC}(\cos D + \cos E + \cos F - 1).$$
Осталось заметить, что треугольник DEF — прямоугольный, и $\cos D=5/13$, $\cos F=0$, $\cos E=12/13$, а $S_{DEF} = 30$.

Вариант 12

1. 2. 2. $\left[0;\left(15-\sqrt{29}\right)/10\right)$. 3. $-\pi/20$, $39\pi/20$. Уравнение преобразуется к виду
$$3\left(\sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)+1\right)+\sin^2\left(x+\frac{\pi}{20}\right)=0.$$
Отсюда следует, что исходное уравнение равносильно системе
$$\begin{cases}\sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)+1=0,\\ \sin\left(x-\frac{\pi}{20}\right)=0,\end{cases}$$
из второго уравнения которой следует, что $x = -\pi/20 + \pi n$.
Осталось выбрать те значения x, которые удовлетворяют первому уравнению и принадлежат отрезку $[-2\pi;2\pi]$.
4. 30°. Диаметр окружности, описанной около треугольника

HBH_1, равен $2/\sqrt{3}$. Поэтому $HH_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin(90°-\alpha)$. С другой стороны, $HH_1 = AC\sin\alpha = 2\sin\alpha$. Отсюда $\operatorname{tg}\alpha = 1/\sqrt{3}$.

5. а) $\left[\left(7-2\sqrt{7}\right)/7;1\right)$; б) $b=1/2$.

а) Пусть $f(x)=(a-1)x^2-(a+1)x+2a-1$. Условие этого пункта равносильно системе

$$\begin{cases} D \ge 0, \\ (a+1)/(a-1) < 2, \\ (a-1)f(1) > 0. \end{cases}$$

б) Поскольку

$$(x_1-b)(x_2-b) = x_1x_2 - b(x_1+x_2) + b^2 = $$
$$= b^2 - b + 2 + (1-2b)/(a-1),$$

видим, что лишь при $b=1/2$ данное выражение не зависит от a.

Вариант 13

1. $\{1;2\}$. 2. 21.

3. $\sqrt{7/3}$. Найдите AB, а затем примените теорему косинусов к треугольнику AOC.

4. $(3/4;1)\cup(1;3]$.

5. 0; $\pi(2n+1)$, $n \in Z$. Уравнение равносильно совокупности $\cos x=-1, \cos x=1+2\sqrt{x}$.

6. $-2 \le a \le 2$. При $x \ge a$ неравенство равносильно неравенству $(x-a)(x+a+4) \ge 0$, справедливому при всех $x \ge a$ тогда и только тогда, когда $a \ge -a-4$, т.е. при $a \ge -2$.
Аналогично, при $x<a$ приходим к неравенству $(x-a)(x+a-4) \ge 0$, справедливому при всех $x<a$ при $a \le -a+4$, т.е. при $a \le 2$.

ФИЗИКА

Физический факультет

1. $T = 2\pi\sqrt{(M+m)R/(mg)}$.

2. $F_{min} = 2(F_0 + \mu mg)$.

3. $Q = k(l-l_0)^2/2 + m^2g^2/(2k) - mg(l\cos\alpha - l_0)$.

4. $A = \nu R\left(\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}\right)^2/2$.

5. $m = N\tau T_1/\left(\lambda(T-T_1)\right) = 35{,}3$ кг.

6. $E > k/(ql)$. 7. $A = C\mathcal{E}^2(1-1/\varepsilon)/2$.

8. $|\Delta\varphi| = \frac{R_2-R_1}{R_2+R_1}\frac{\pi r^2}{2}\left|\frac{\Delta B}{\Delta t}\right|$.

9. $n_ж > \sqrt{2}$. 10. $x = \lambda/\left(\alpha(n-1)\right)$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. $E = m_1m_2\omega^2 l^2/\left(2(m_1+m_2)\right) = 0{,}1$ Дж.

2. $T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho(1-\eta/100\%)}} = 4{,}3\cdot10^4$ с $= 12$ ч.

3. $p = p_0/\sqrt{1+16/\alpha^2} = 447$ кг·м/с.

4. $p = mRT(V_1+V_2)/(MV_1V_2) = 1{,}39$ МПа.

5. $x = Vmg/\left(S(p_нS - mg)\right) = 0{,}5$ см при $m < p_нS/(2g)$; $x = V/S = 10$ см при $m \ge p_нS/(2g)$.

6. $k = R_1^2/(r+R+R_1)^2 = 1/16$.

7. $r = R_1(n-m)/\left(n(n-1)\right) = 1/6$ Ом.

8. $H = h(\Gamma+1) = 5$ мм.

9. $H \approx h\alpha^2(n-1) \approx 2{,}5$ см.

10. $H = hl/F = 3$ мм.

Химический факультет

1. $F = (M+m)g\operatorname{tg}\alpha = 60$ Н. 2. $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\frac{AB}{BC} = 45°$.

3. $m = \frac{(k-1)p_0S}{g(k+1)} = 10$ кг. 4. $\Delta m = \rho A/p = 7{,}5\cdot10^{-3}$ г.

5. $T = \frac{q_1(q_2+q_3/4)}{4\pi\varepsilon_0 l^2} = 108$ мН.

6. $Q = \frac{\left(B_1\pi d^2/4\right)^2}{Rt_1} = 9{,}8\cdot10^{-7}$ Дж.

7. $m = \frac{U_m^2\tau(1+\alpha t)}{2\lambda R(1+\alpha t_к)} = 24$ г. 8. $\lambda = 2\pi c\,q_m/I_m = 1884$ м.

9. $r = d/(n-1) = 5$ мм.

10. $f = -2/3F = -40$ см (изображение мнимое).

Географический факультет

1. $a = \frac{\Delta s}{4(\Delta t)^2} = 2{,}5$ м/с². 2. $h = R_З\left(\sqrt{2}-1\right) = 2650$ км.

3. $m = \frac{(Q_1-Q_2)M}{R\Delta T} = 0{,}38$ г. 4. $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{m}{\rho_н V}100\% = 60\%$.

5. $\mathcal{E}_1 = (I_1+I_2)(R+r_1+r_2)/2 = 4{,}5$ В;
$\mathcal{E}_2 = (I_1-I_2)(R+r_1+r_2)/2 = 1{,}5$ В.

6. $\lambda_1 = c/\nu_1 = 4{,}29$ м; $\lambda_2 = \lambda_1\sqrt{C_2/C_1} = 5\lambda_1 = 21{,}5$ м.

7. $v_{отн} = 2v\sin\alpha = 1$ м/с. 8. $L = \frac{Hn}{\sqrt{n^2-1}} = 1{,}82$ м.

9. $F = \frac{dL}{L+l} = 25$ см. 10. $N = \frac{W\lambda}{hc} = 3\cdot10^{13}$

Новосибирский государственный университет

Вариант 1

1. Если выше и ниже крюка натяжения T_1 и T_2 одинаковы (рис. 19), то

$2T\cos\frac{\alpha}{2} = T$, и $\alpha = 120°$.

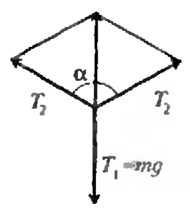


Рис. 19

Значит, при $\alpha = 120°$ нить может порваться в любом месте. Если $\alpha < 120°$, то $T_2 < T_1$, поэтому нить порвется ниже крюка. Соответственно при $\alpha > 120°$ нить порвется выше крюка.

2. В начале подъема первого поршня по закону Клапейрона — Менделеева имеем

$(p_а + m_1g/S)V_0 = \nu RT_1$,

где ν — число молей газа. В начале подъема второго поршня, с учетом действия «зацепа», получаем

$\left(p_а + (m_1+m_2)g/(2S)\right)V_0(1 + Sh/V_0) = \nu RT_2$.

Поделив второе уравнение на первое, находим

$$T_2 = T_1\left(1 + \frac{hS}{V_0}\right)\left(1 + \frac{(m_2-m_1)g}{2(p_аS + m_1g)}\right).$$

3. Начертим начальную схему, сводящуюся к трем конденсаторам с зарядами q_1, q_2 и q_3, и распределение потенциала (рис. 20).

Тогда

$q_1 = CU_1,\ q_2 = C(U_1+U_2),\ q_3 = CU_2.$

После переключения образуются два одинаковых конденсатора емкостью C каждый, соединенных параллельно, на которых останется половинный неуравновешенный заряд:

$(q_3 - q_1)/2 = C(U_2 - U_1)/2.$

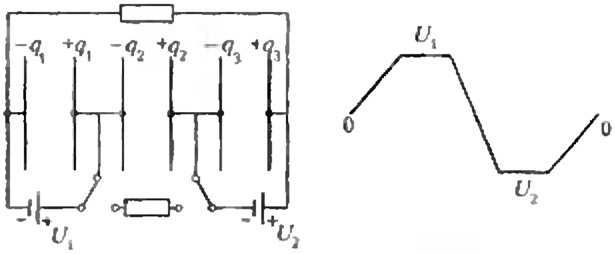


Рис.20

С учетом полученных результатов для энергии в конденсаторах вначале имеем

$$W_1 = CU_1^2/2 + C(U_1+U_2)^2/2 + CU_2^2/2.$$

После переключения —

$$W_2 = \frac{C}{2}\frac{(U_2-U_1)^2}{4} + \frac{C}{2}\frac{(U_2-U_1)^2}{4} = \frac{C(U_2-U_1)^2}{4}.$$

Таким образом, выделившееся количество теплоты равно

$$Q = W_1 - W_2 =$$

$$= \frac{C}{2}\left(U_1^2 + (U_1+U_2)^2 + U_2^2 - \frac{(U_2-U_1)^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{3C}{4}(U_1+U_2)^2 = \frac{3}{4}\frac{\varepsilon_0 S}{d}(U_1+U_2)^2.$$

4. Накачка шины определяется числом ходов насоса, при каждом из которых захватывается и вгоняется в шину фиксированная масса воздуха, определяемая атмосферным давлением p_a и рабочим объемом насоса. Пренебрегая небольшой работой по расправлению велосипедной камеры до полного объема V, оценим минимальную работу по созданию перепада давления $\Delta p \sim p_a$ при постоянном объеме V:

$$A \sim \Delta p V \sim p_a V \sim p_a \cdot 2\pi RS,$$

где радиус шины $R = 0{,}35$ м, ее сечение $S \sim 10\ \text{см}^2 = 10^{-3}\ \text{м}^2$, $p_a \sim 10^5$ Па. Отсюда

$$A \sim 10^5 \cdot 6{,}3 \cdot 0{,}35 \cdot 10^{-3}\ \text{Дж} \sim 200\ \text{Дж}.$$

5. Плоскопараллельная пластина, роль которой играет прямоугольный сосуд с водой, не меняет направление параллельного пучка света, прошедшего сквозь нее, однако смещает его. Это смещение и наблюдается в первом случае. Линза собирает все параллельные лучи в фокус, независимо от их не слишком большого смещения. Поэтому, если расположить экран на фокусном расстоянии от линзы, то смещения пятна при вращении сосуда наблюдаться не будет.

Вариант 2

1. Ток увеличится в 6 раз.
2. При $T - mg\sin\alpha \le \mu mg\cos\alpha$ неподвижен брусок (T — натяжение нити). При $T - Mg\sin\alpha \le \mu mg\cos\alpha$ неподвижна доска. В равновесии $2T = (m+M)g\sin\alpha$. Отсюда получаем условие неподвижности системы:

$$1 - 2\mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha \le M/m \le 2\mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha + 1.$$

3. Используя закон Гука, объединенный газовый закон, а также закон сохранения энергии, получаем

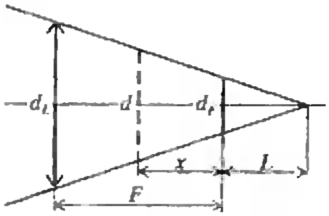


Рис.21

$$V_1 = V\left(\frac{4cT + 3pV}{2cT + pV}\right)^{1/2}.$$

4. Введем диаметр пятна в фокусе d_F, диаметр пятна на расстоянии x от фокуса d, диаметр линзы d_L и угловой размер Солнца α. Если сфокусировать свет от Солнца на экран, то размер пятна в фокусе равен $d_F = \alpha F$. Этот размер определяется лучами, прошедшими через края линзы (рис. 21). Из подобия треугольников получаем

$$\frac{d}{L+x} = \frac{d_F}{L} = \frac{d_L}{F+L}.$$

Так как по условию $d = 2d_F$ и $d_L \gg d_F$, то

$$x = \frac{d_F^2}{\alpha(d_L - d_F)} \approx \frac{d_F^2}{\alpha d_L}.$$

При $\alpha = 10^{-2}$ рад, $d_F = 10^{-1}$ см, $d_L = 3$ см находим $x \sim 3$ мм.

5. В сосуде с длинной трубкой действует дополнительная сила (из-за неразрывности воды) — вес добавочного столбика воды в трубке.

Вариант 3

1. Клин не сдвинется, если $\mathrm{tg}\,\alpha \le \mu$.
2. В тепло переходит вся работа по приобретению поршнями одинаковых импульсов: $Q = p_a SL$.
3. После замыкания ключа два образовавшихся конденсатора, на одном из которых находится заряд q_1, а на другом $q_2 + q_1$, разряжаются частично на землю, частично друг на друга, оставляя в итоге на изолированной пластине заряд q_2. Общая емкость в конце равна $C_1 + C_2$. Тогда, в соответствии с законом сохранения энергии, получим

$$Q = (q_1h_1 + q_2h_2)^2/(2\varepsilon_0 Sh_1).$$

4. Сила отдачи

$$F \sim \Delta(mv)/\Delta t \sim mv\cdot u/l \sim m^2v^2/(Ml),$$

где m — масса пули, v — ее скорость, l — путь приклада, u — его скорость, M — масса ружья. При $m \sim 10^{-2}$ кг, $M \sim 5$ кг, $v \sim 7\cdot10^2$ м/с, $l \sim 5\cdot10^{-2}$ м сила отдачи $F \sim 200$ Н.

Если приклад прижат плотно, то $M \sim 100$ кг — масса стрелка с ружьем и $F \sim 10$ Н. Этот вариант обычно и реализуется.

5. При замыкании ключа ток оба полупериода идет через один диод и одну лампочку. При разомкнутом ключе оба полупериода ток идет последовательно через две лампочки. Поскольку амплитуда напряжения неизменна, то выделяющаяся мощность, если пренебречь зависимостью сопротивления от температуры, обратно пропорциональна сопротивлению. Вот почему при замыкании ключа лампочки горят ярче.

Независимый московский университет

1. Будем считать, что прямые $L_1, L_2, \ldots, L_n$ проходят через начало координат. Тогда для любой точки x сумма расстояний до этих углов равна

$$S(x) = \sum_{i=1}^{n}\left|(\bar{e}_i, \bar{x})\right|,$$

где $\bar{e}_i$ — единичные векторы, перпендикулярные прямым $L_1, L_2, \ldots, L_n$ соответственно, а $\bar{x}$ — радиус-вектор точки x.

Из вида функции $S(x)$ следует, что внутри любого угла, образованного этими прямыми, она линейна. Поэтому ГМТ с суммой расстояний до указанных прямых есть контур некоторого многоугольника.

Чтобы показать, что этот многоугольник выпуклый, рассмотрим две точки x, y, для которых $S(x)=S(y)=S$. Необходимо показать, что $S(z)\le z$ для любой точки z отрезка $[x;y]$. Заметим, что $\bar z=\lambda\bar x+(1-\lambda)\bar y$, где $0\le\lambda\le 1$. Поэтому

$$S(z)=\sum_{i=1}^{n}\left|\left(\bar e_i,\lambda\bar x+(1-\lambda)\bar y\right)\right|\le$$

$$\lambda\sum_{i=1}^{n}\left|\left(\bar e_i,\bar x\right)\right|+(1-\lambda)\sum_{i=1}^{n}\left|\left(\bar e_i,\bar y\right)\right|=S,$$

что и требовалось доказать.

2. Из равенств $x^{15}-1=\left(x^5-1\right)\left(x^{10}+x^5+1\right)=$
$=\left(x^3-1\right)\left(x^{12}+x^9+x^6+x^3+1\right)$ можно усмотреть, что
$x^{10}+x^5+1=\left(x^2+x+1\right)\left(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1\right)$.

3. Пусть $G(x)=F(x)-x$. Тогда неравенства из условия задачи переписываются так:

$$\begin{cases}G(x+3)\le G(x),\\ G(x+2)\ge G(x).\end{cases}$$

Теперь последовательно получаем цепочку неравенств

$$G(x)\ge G(x+3)\ge G(x+1)\ge G(x+4)\ge G(x+2)\ge G(x),$$

из которой следует, что $G(x)=G(x+1)$. Т.е. функция $G(x)=$ $=F(x)-x$ периодична с периодом 1.

4. 4. *Указание*. Будем отражать в точке столкновения не траекторию шарика, а сам куб так, чтобы траектория шарика «распрямилась». Тогда траектория шарика станет лучом $(6t;\ 15t;\ 10t)$, где t — время, столкновениям будут соответствовать моменты времени, когда одна из координат целочисленна, а попаданию на ребро — моменты времени, когда две координаты одновременно целочисленные.

Первые моменты времени, когда пара координат становится целочисленной, равны для трех возможных пар координат $1/\text{НОД}(6;\ 15)$, $1/\text{НОД}(6;\ 10)$, $1/\text{НОД}(15;\ 10)$ или $1/3$, $1/2$, $1/5$ соответственно.

Таким образом, первое попадание на ребро происходит при $t=1/5$. По четности соответствующих координат находим ребро, в которое попал шарик. Это ребро между вершинами (0;1;0) и (1;1;0) куба. Число обращений в интервале $(0;\ 1/5)$ находится прямым подсчетом:

$[6/5]+2+1=4$.

5. Заметим, что

$$\int_0^1 3^{-(x-1)^2}dx=\int_0^1 3^{-x^2}dx.$$

Поскольку $e<3$, то для $0<x\le 1$ выполнено неравенство $e^{-x^2}>3^{-x^2}$, при $x=0$ же $e^0=3^0$. Это означает, что график функции $y=3^{-x^2}$ на $(0;\ 1]$ всюду расположен ниже графика функции $y=e^{-x^2}$, за исключением точки $x=0$.

Поэтому

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx>\int_0^1 3^{-(x-1)^2}dx.$$

6. $1/6$; $1/2$. Каждая грань черного тетраэдра отсекает от белого тетраэдра тетраэдр, имеющий белую точку в вершине и равносторонний треугольник в основании. Высота этого тетраэдра равна расстоянию от вершины куба до плоскости, проходящей через три вершины, соседние с данной, т.е. $\sqrt3/3$. Сторона основания отсекаемого тетраэдра равна расстоянию между центрами соседних граней куба, т.е. $\sqrt2/2$. Поэтому объем отсекаемого тетраэдра равен $\frac13\cdot\frac{\sqrt3}{3}\cdot\frac{\sqrt3}{8}=\frac1{24}$.

Таким образом, пересечение черного и белого тетраэдров имеет объем на $4/24=1/6$ меньший, чем объем самих тетраэдров.

Объем черного или белого тетраэдра легко найти, если заметить, что каждый из них дополняется до куба 4-мя тетраэдрами объемом $1/6$. Итак, объем черного и белого тетраэдров равен $1/3$, объем их пересечения равен $1/6$, а объем их объединения $1/3+1/3-1/6=1/2$.

7. $12/5\le d\le 5$. Шириной фигуры M вдоль прямой l назовем диаметр ортогональной проекции M на l.

Возьмем в качестве l пересечение плоскостей, ортогональные проекции на которые дают круг и треугольник. Тогда ширина M вдоль l равна ширине проекций M на эти плоскости, тем самым ширина проекций вдоль некоторой прямой должна совпадать.

Отсюда получаем необходимые условия на d (ширина круга вдоль любой прямой):

$$\frac{12}{5}\le d\le 5,$$

поскольку минимальная ширина треугольника определяется его наименьшей высотой, максимальная — его наибольшей стороной.

Для доказательства достаточности этих условий выберем некоторую прямую l. Пусть ширина треугольника вдоль l равна d. Построим полосу шириной d, содержащую треугольник. Множество M составили из отрезков, перпендикулярных плоскости треугольника и симметрично расположенных относительно нее (середина отрезка находится в плоскости). Такие отрезки строятся над каждой точкой треугольника, причем их длина равна длине хорды на расстоянии r от центра в круге с диаметром d, где r — расстояние от данной точки треугольника до середины полосы.

Проекция полученного множества на плоскость, проходящую через l и перпендикулярную плоскости треугольника, есть круг диаметром d.

8. 112. Запишем условие самопересечения:

$$\begin{cases}\cos 15t=\cos 15u,\\ \cos 17t=\cos 17u,\\ t>u.\end{cases}$$

Оно эквивалентно условию

$$\begin{cases}\sin\left(15(t-u)/2\right)\sin\left(15(t+u)/2\right)=0,\\ \sin\left(17(t-u)/2\right)\sin\left(17(t+u)/2\right)=0,\\ t>u.\end{cases}$$

Последнее можно переписать как

$$\begin{cases}t-u=\dfrac{2\pi}{15}k\ \text{или}\ t+u=\dfrac{2\pi}{15}k,\ k\ne0,\ k\in Z^*,\\ t-u=\dfrac{2\pi}{17}l\ \text{или}\ t+u=\dfrac{2\pi}{17}l,\ l\ne0,\ l\in Z^*.\end{cases}$$

Из вида этого последнего условия ясно, что тройных точек пересечения нет (возможно выполнение первого равенства в первом условии, второго — во втором или второго — в первом, первого — во втором и никак иначе).

Нарисовав указанные условия на координатной плоскости tOu, получаем два семейства прямоугольников (рис. 22), в одном их

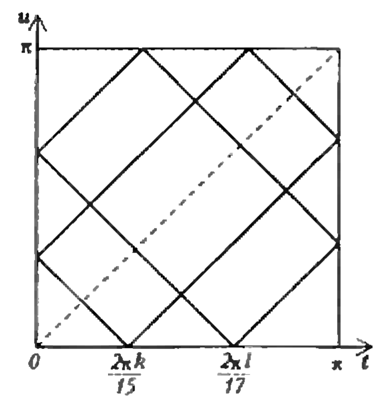


Рис. 22

7, в другом — 8, а точки самопересечения соответствуют точкам пересечения этих прямоугольников, лежащим ниже диагонали квадрата. Из рисунка видно, что любые два таких прямоугольника пересекаются в двух точках ниже диагонали.
Таким образом, общее число точек самопересечения равно $2 \cdot 7 \cdot 8 = 112$.

9. $d = \left(\sqrt{5} - 1\right) / 4$. Рассмотрим круги с радиусами d и с центрами в вершинах ромба. Пусть h — расстояние от вершины ромба до его средней линии. Ясно, что $d \le h$.
Если $d<h$, то внутренности углов, образованных касательными к

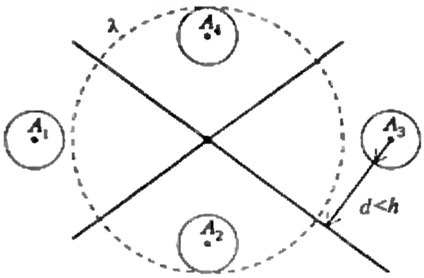


Рис.23

кругам, не пересекаются. Рассмотрим окружность λ, внешним образом касающуюся кругов с центрами на меньшей диагонали ромба.
Пусть найдутся внутри кругов точки, лежащие на одной окружности C. Она обязана пересекать λ. Но тогда проекции A_1 и A_3 должны лежать на дуге, дополнительной к дуге, на которой

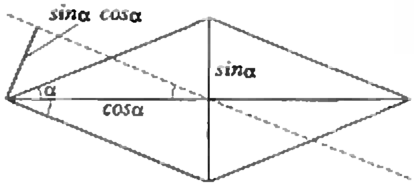


Рис.24

лежат проекции A_2 и A_4 (рис. 23). Это невозможно. Значит, λ обязана совпадать с C.
Осталось выяснить для данного ромба, какое из двух возможных оптимальных значений меньше. Они легко выражаются через половину острого угла ромба (рис. 24):

$$d^* = \frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{2}, \quad h = \sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha.$$

На отрезке $[0; \pi/4]$ d^* убывает, а h возрастает. Так что максимум их минимума достигается при $d^* = h$.
Решив уравнение

$$\cos\alpha - \sin\alpha = \sin 2\alpha;$$

получаем, что

$$\sin 2\alpha = \left(-1 + \sqrt{5}\right) / 2.$$

10. Будем сразу доказывать б).
Из условия 2) имеем:

$$P(x) = (x - 0,9)\left(ax^2 + bx + c\right),$$

а из условия 1)

$$a+b+c=10.$$

Из условия 3) при $x=0$ получаем $0 \le c \le 1/9$.
Если $a<0$, то

$$ax^2 + bx + c > (a+b)x + c,$$

и $a+b>9$, т.е.

$$P(0,5) < -0,4(9+c) < -3,6$$

в противоречии с условием 3.

Заметим, что при $x \in (0; 0,9)$ выполнено неравенство

$$0 < ax^2 + bx + c < \frac{0,1}{0,9 - x}. \qquad (*)$$

Пусть $x=0,5+u$. Тогда

$$ax^2 + bx + c = 0,25a + 0,5b + c + au^2 + (a+b)u = au^2 + (a+b)u + p_0$$

Из (*) получаем, что $p_0<0,25$.
Пусть $a \ge 0$, $a+b>9$. При $u=0,2$ получаем:

$$au^2 + 9u < p_0 + au^2 + (a+b)u < 0,5, \quad au^2 < 0,5 - 9u < 0$$

Противоречие.
Противоречия, полученные при предположениях $a<0$ и $a \ge 0$, доказывают утверждение.

КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК

(см. «Квант» № 1)

Решения головоломок показано на рисунке 25.

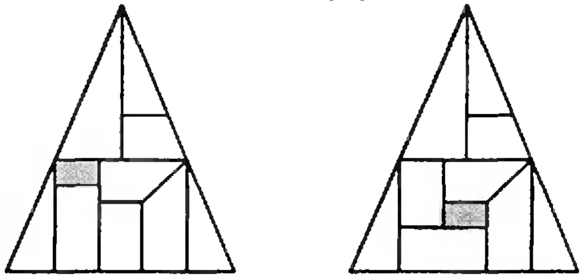


Рис.25

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ
С.М.Давыдова, А.А.Егоров, А.Т.Калинин, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, А.П.Савин, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ
В.Н.Власов, А.О.Хоменко, Д.А.Крымов, Л.А.Тишков, Д.С.Филиппов, С.А.Шутов

ГЛАВНЫЙ ХУДОЖНИК
С.А.Стулов

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА
С.В.Вакуленко, Е.В.Титова

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ
Н.И.Лямина

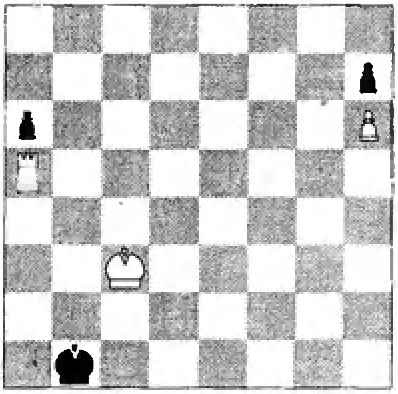
Адрес редакции:
103006 Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант», тел. 250-33-54, 251-55-57

Отпечатано в Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Министерства печати и информации Российской Федерации
142300 г. Чехов Московской области
Заказ № 2331

Цилиндрические шахматы

У шахматных композиторов-фантастов цилиндрические шахматы — пожалуй, самый популярный жанр сказочной композиции. Небольшое изменение доски, а сколько новых и неожиданных возможностей открывается! Из обычной доски можно соорудить две цилиндрические — вертикальную и горизонтальную. Первая получается склеиванием вертикальных краев стандартной доски, вторая — горизонтальных. Рассмотрим несколько оригинальных задач.

Мат в 2 хода

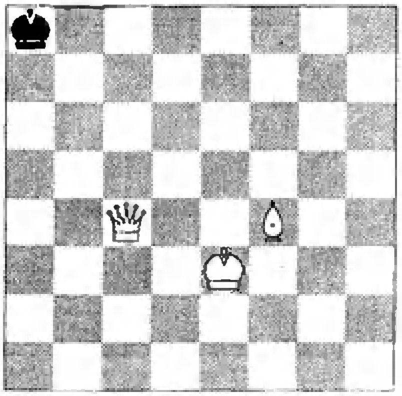


а) на обычной доске,
б) на вертикальном цилиндре.

Простейший пример, раскрывающий цилиндрические «нюансы». В случае а) все просто — 1. Л:а6 Крс1 2. Ла1×. Но на цилиндрической доске — задание б) — после 1. Л:а6 теряется ладья: 1...h7:а6! (вертикали «а» и «h» склеены!). Если же ладья уйдет с а5, то черные продвинут свою пешку и мата нет. Решает **1. Ла5—а5!!** — ладья совершает «круг почета» и возвращается на исходное место! На вынужденное **1...Крс1** следует **2. Ла5—а1×**.

В следующей задаче задание надо выполнить уже на трех разных досках.

Мат в 1 ход



а) на обычной доске,
б) на вертикальной цилиндрической,
в) на горизонтальной цилиндрической.

На доске всего четыре фигуры, причем построение очень легкое, изящное — белые фигуры удалены от черного короля, и, кажется, об одноходовом мате не может быть и речи. Чтобы глубже проникнуть в геометрическую суть цилиндрических шахмат, внимательно изучим решение данной задачи.

а) На обычной доске к цели ведет единственное **1.Фа6×**. На 1.Фа2 (с8, е4)+ следует возражение 1...Крb7 (а7, а7)!

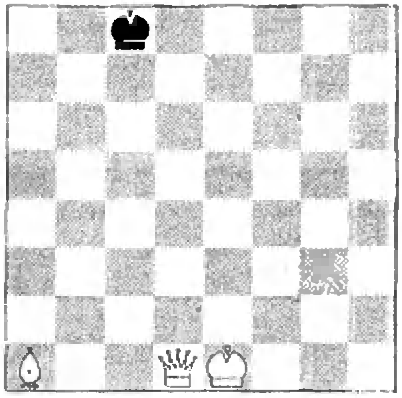
б) На вертикальном цилиндре склеены линии «а» и «h», и 1. Фа6(е4)+ опровергается путем 1...Крh8! На 1.Фс8(g8, h7)+ есть ответ 1...Крh7 (b7, h7). Матует неожиданный маневр **1.Фс4—а2—h1×!** Ферзь взял под контроль сразу четыре поля в районе черного короля (включая занятое им) — b7, а8 по диагонали h1—а8 и h7, h8 по вертикали «h». Любопытно, что с более близкого расстояния отнять у короля столько полей, не становясь под бой, ферзь не может ни на цилиндрической, ни на обычной доске. Еще два поля для отступления короля — а7 и b8 держит слон по диагонали с1—h6—а7—b8.

Обратите внимание, что на цилиндрических досках все диагонали содержат по восемь полей, причем геометрически каждая диагональ сворачивается в виток спирали.

в) На горизонтальном цилиндре склеены первая и восьмая линии, и на 1.Фа6+ у короля есть ответ 1...Кра8—b1! Решает только **1.Фс4—f1—g8—h7×!**

А вот забавная задача с тем же соотношением сил и весьма необычным заданием.

Мат в... 0 ходов



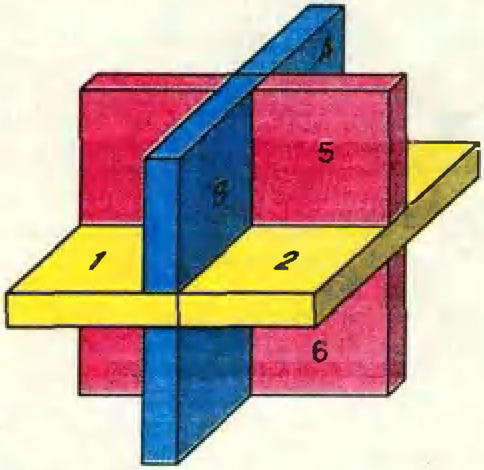
В этой задаче-шутке (пока перед нами обычная доска) мат и вправду ставится в 0 ходов, причем сразу двумя способами. Белые, как и требуется в задании, не дотрагиваются ни до одной из своих фигур, но зато... сворачивают доску в цилиндр. На любой из досок — горизонтальной или вертикальной — черный король сразу оказывается заматованным. Пусть приклеены друг к другу крайние горизонтали. Тогда поле а1 присоединяется слева к диагонали h2—b8, и поля b8, с7 попадают под наблюдение слона. Кроме того, в одну сливаются диагонали а6—с8 и d1—h5, и в результате ферзь нападает на черного короля, одновременно отнимая у него поле b7.

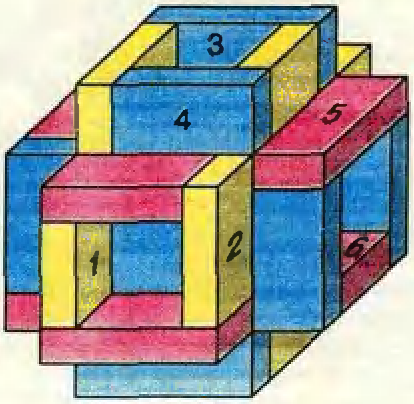
На вертикальном цилиндре поле а1 вновь присоединяется к диагонали b8—h2, но уже справа, опять сливаются и диагонали d1—h5 и а6—с8. И снова черный король в матовой сети.

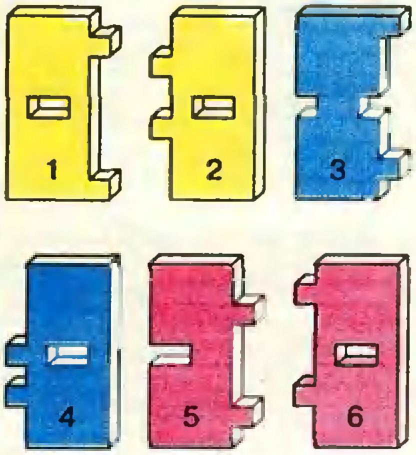
Е. Гик

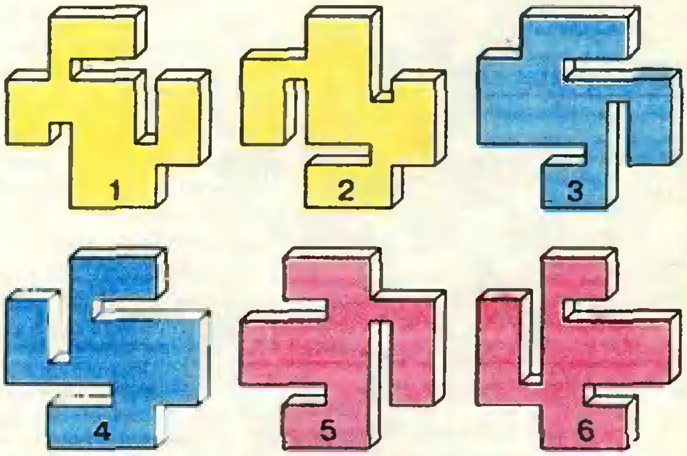
Индекс 70465

КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК









Головоломки Бодрова

Ваша коллекция головоломок сегодня может пополниться двумя оригинальными игрушками, придуманными читателем А.Бодровым из города Зеленокумска Ставропольского края.
Сильная сторона этих головоломок — невозможность сборки последовательным сцеплением одной части с другой. Необходимо сначала установить все 6 частей в некоторое исходное положение, а затем последовательными движениями привести головоломку в то состояние, которое показано на рисунках.
Головоломки нетрудно изготовить из фанеры, пластмассы или картона. Ширина прорезей и выступов на деталях равна толщине материала, который окажется у вас под рукой.